



KANSALLINEN
KOULUTUKSEN
ARVIOINTIKESKUS

VIITEKEHYS MATEMATIIKAN KANSALLISIIN OPPIMISTULOSARVIOINTEHIN VUOSILUOKILLA 1–9

Annette Ukkola | Anne Kivistö (toim.)

JULKAISUT 6:2023

VIITEKEHYS MATEMATIIKAN KANSALLISIIN OPPIMISTULOSARVIOINTEHIN VUOSILUOKILLA 1–9

Annette Ukkola
Anne Kivistö
(toim.)



Kansallinen koulutuksen arviointikeskus
Julkaisut 6:2023

JULKAISIJA Kansallinen koulutuksen arviointikeskus

KANSI JA ULKOASU Juha Juvonen (org.) & Ahoy, Jussi Aho (edit)
TAITTO PunaMusta

ISBN 978-952-206-788-3 pdf
ISSN 2342-4184 (verkkojulkaisu)

© Kansallinen koulutuksen arviointikeskus

1	Johdanto	5
1.1	Matematiikan viitekehyksen tarkoitus ja rakenne	7
1.2	Matematiikan osaamisen kansallinen arviointi	8
1.2.1	Kansalliset oppimistulosarvioinnit	8
1.2.2	Perusopetuksen opetussuunnitelma 2014	8
1.2.3	Matematiikka perusopetuksen opetussuunnitelmassa 2014	9
1.2.4	Opetussuunnitelman perusteiden uusi arviointiluku vuonna 2020.....	11
1.2.5	Viitekehystä varten tehdyt tulkinnat ja valinnat	11
1.3	Viitekehyksessä käytetty osaamisen luokittelujärjestelmä.....	13
2	Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden tavoitteet ja arvioinnin kohteet	19
2.1	Matematiikan kaikkiin sisältöalueisiin liittyvät tavoitealueet	21
2.2	Matematiikan käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet	23
2.2.1	Sisältöalue 1: Ajattelun taidot ja menetelmät	23
2.2.2	Sisältöalue 2: Luvut ja laskutoimitukset	25
2.2.3	Sisältöalue 3: Algebra.....	28
2.2.4	Sisältöalue 4: Funktiot.....	30
2.2.5	Sisältöalue 5: Geometria	32
2.2.6	Sisältöalue 6: Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys.....	35
3	Arvioinnin toteuttamisen periaatteita.....	39
3.1	Arviointihankkeen vaiheet	40
3.2	Mittarin laatimiseen liittyviä näkökulmia	41
3.3	Yksittäisen tehtävän laatimiseen liittyviä näkökulmia	41
	Lähteet	45
	Liitteet	49
	LIITE 1. Tehtävämahdollisuuksia matematiikan oppiaineen sisältöalueille	50

Johdanto

1

Perusopetuksen oppimistulosten arviointien tehtävänä on tuottaa luotettavaa tietoa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (POPS; OPH 2014) tavoitteiden saavuttamisesta, oppiaineen osaamisen tasosta ja koulutuksen tasa-arvon sekä yhdenvertaisuuden toteutumisesta. Oppimistulosarviointien meneillään olevaan kehittämistyöhön kuuluu arvioitavien oppimäärien sisällöllisten viitekehysten laatiminen etukäteen niistä oppimääristä, joista kaivataan trenditietoa (tietoa osaamisen muutoksista ja vaihtelusta) ja joita arvioidaan laajasti perusopetuksen nivelvaiheissa ja päättövaiheessa.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet heijastavat koulutuspoliittisia linjauksia, ajan arvoja, oppimiskäsityksiä, pedagogisia painotuksia ja oppiaineen taustatieteiden näkemyksiä. Oppiaineiden tavoitteet uudistuvat sekä muokkautuvat ja sisältöalueiden nimitykset saattavat muuttua uusien perusteiden myötä. Opetussuunnitelman perusteiden vaihtumisesta huolimatta arviointien toivotaan tuottavan myös trenditietoa: tietoa erityisesti äidinkielen ja kirjallisuuden ja matematiikan osaamisen tasosta ja sen mahdollisista muutoksista.

Jotta Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen (Karvi) eri vuosiluokilla toteutettavat matematiikan ja äidinkielen oppimistulosarviointit eivät ole toisistaan erillisiä hankkeita ja koska suunnitteilla oli useita vuosiluokkia koskevia pitkittäisarviointihankkeita, Karvissa päätettiin luoda POPS:iin perustuen eri vuosiluokkien sisältöjä ja tavoitteita yhdistävät asiakirjat äidinkielen ja matematiikan arviointien tueksi. Näitä kutsutaan tuonnempana viitekehyksiksi.

Viitekehysten tarkoituksena on lisätä arviointien yhdenmukaisuutta, johdonmukaisuutta ja vertailtavuutta. Yhteiset periaatteet varmistavat arviointien luotettavuuden, hyödynnettävyyden, läpinäkyvyyden ja tasaisen laadun sekä mahdollistavat oppiaineiden ja -määrien eri arviointikertojen vertailtavuuden. Arviointiraporteissa viitataan asiakirjoissa määriteltyihin yhteisiin menetelmiin, periaatteisiin ja toimintatapoihin. Näistä viitekehyksistä toinen, äidinkielen ja kirjallisuuden viitekehys (Karvi, 2020) on julkaistu jo aiemmin äidinkielen ja kirjallisuuden 9. luokan oppimistulosarviointin tulosten yhteydessä (Kauppinen & Marjanen, 2020). Matematiikan viitekehys julkaistaan tässä yhteydessä.

Viitekehystyö aloitettiin Karvissa vuonna 2017 äidinkielen ja kirjallisuuden viitekehuksesta. Matematiikan viitekehystyö käynnistyi syksyllä 2018. Työryhmässä olivat asiantuntijoina mukana Tuula Havonen, Markku Hannula ja Kaisa Vähähyyppä ja Karvista Sami Julin, Anne Kivistö ja Annette Ukkola. Viitekehys valmistui matematiikan arvioinnin käyttöön vuonna 2019. Viitekehystä täydennettiin vuosina 2022 ja 2023 päivittämällä tekstiä mm. aiemman vaiheen jälkeen valmistuneen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden uuden arviointiluvun (OPH, 2020) lähemmällä tarkastelulla (luku 1.2.4).

1.1 Matematiikan viitekehysten tarkoitus ja rakenne

Tämän viitekehysten tarkoituksena on yhdenmukaistaa kansallisia matematiikan oppimistulosarviointeja. Yhteinen matematiikan oppimistulosarviointien viitekehys toimii työkaluna ja oppaana arviointia toteuttavalle ryhmälle. Oppimistulosarviointeja tehdään 1. luokan alusta lähtien perusopetuksen nivelvaiheissa ja päättövaiheessa, joten tämä viitekehys kattaa matematiikan oppiaineen koko perusopetuksen osalta.

Viitekehystä varten on tehty opetussuunnitelman perusteiden tulkinta, jossa opetuksen tavoitteet on käännetty oppilaan osaamisen tavoitteiksi. Viitekehyksessä nämä tavoitteet esitellään vuosiluokittain eri sisältöalueilta. Näin saadaan näkyviin perusopetuksen aikainen tavoitteiden jatkumo kullakin sisältöalueella. Monitahoiset tavoitteet on lisäksi pilkottu osiin, niin että kunkin numeroidun tavoitteen alla on lueteltu kaikki siihen kuuluvat yksittäiset tavoitteet. Matematiikan oppimistulosarviointia toteuttava ryhmä noudattaa tätä tulkintaa, jolloin uutta tulkintaa ei tehdä erikseen jokaiseen oppimistulosarviointiin. Tämä takaa arviointien vertailtavuuden ja yhdenmukaisuuden.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden tavoitteet on laadittu opetuksen ja yksittäisen oppilaan arvioinnin näkökulmasta, joten kaikkia opetussuunnitelman perusteissa mainittuja tavoitteita ei välttämättä ole sellaisenaan mahdollista arvioida tehtävillä, jotka tähtäävät otoksen tuhansien oppilaiden osaamisen mahdollisimman objektiiviseen arviointiin. Siksi laajaa otantapohjaista oppimistulosarviointia varten on tehtävä valintoja. Nämä valinnat nostetaan esiin tässä viitekehyksessä.

Viitekehysten luvussa 1.2.1 kerrotaan kansallisista oppimistulosarvioinneista, luvussa 1.2.2 esitellään 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita yleisesti, luvussa 1.2.3 kerrotaan matematiikan oppiaineesta perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ja oppimistulosarvioinneissa käytettävä taksonomia. Sen jälkeen luvussa 2 kerrotaan tarkemmin opetuksen ja osaamisen tavoitteista matematiikan sisältöalueilla noudattaen vuosiluokkien 7–9 sisältöaluejakoa. Kunkin sisältöalueen alkuun on nostettu lista avainsanoista, jotka keskeisesti kuvaavat kyseistä sisältöaluetta. Viitekehysten lopussa luvussa 3 kerrotaan matematiikan oppimistulosarviointien toteutuksesta ja mittarin ja tehtävien laatimisesta.

Tämä viitekehys on laadittu vuoden 2014 POPS:n tavoitteiden toteutumisen arvioimista varten. Opetushallitus asetti myöhemmin työryhmän pohtimaan uusia kriteereitä eri arvosanoille perusopetuksen päättövaiheeseen yhdeksännen luokan loppuun ja sen jälkeen myös edeltävään nivelkohtaan kuudennen vuosiluokan loppuun. Yhdeksännen luokan kriteerit otettiin käyttöön 1.8.2021 ja kuudennen luokan kriteerit otetaan käyttöön 1.8.2023. Uusia kriteereitä ei ole tässä viitekehyksessä huomioitu, koska viitekehystä käytettiin vuodelle 2020 suunnitellun matematiikan yhdeksännen luokan oppimistulosarvioinnin valmistelussa, joka alkoi jo vuonna 2019. Tähän viitekehykseen tullaan tekemään päivityksiä uusien kriteerien ja tämän viitekehysten mukaan toteutettujen oppimistulosarvioinneista saatujen käytännön kokemusten myötä.

1.2 Matematiikan osaamisen kansallinen arviointi

1.2.1 Kansalliset oppimistulosarviointit

Oppimistulosarviointien toteuttamista ohjaa Valtioneuvoston asetus, jonka mukaan oppimistulosten arviointien tavoitteena on tiedon hankkiminen ja analysoiminen valtakunnallisen koulutuspoliittisen päätöksenteon ja koulutuksen kehittämisen pohjaksi sekä koulutuksen paikallisen kehittämistyön ja päätöksenteon pohjaksi. Tavoitteena on myös opiskelijoiden oppimisen, opetustoimen henkilöstön työn ja oppilaitosten kehittämisen tukeminen. (Asetus 10.9.2009/1061.)

Oppimistulosarviointit tuottavat kansallista tietoa oppilaiden osaamistasosta. Niiden tarkoituksena on arvioida opetussuunnitelman tavoitteiden toteutumista. Arviointit toteutetaan otospohjaisesti siten, että otos edustaa kattavasti arviointiin osallistuvaa ikäluokkaa kansallisella tasolla. Yliotostusta voidaan tehdä sekä alueellisesti että kieliryhmittäin tarpeen mukaan. Tyypillisesti arviointit kohdistuvat perusopetuksen nivelvaiheisiin ja päättövaiheeseen.

Oppimistulosarviointeja tehdään perusopetuksen ensimmäisestä luokasta alkaen, koska sitä nuoremmille ikäluokille ei ole asetettu valtakunnallisia tavoitteita oppiaineisiin. Varhaiskasvatuksen tai esiopetuksen tavoitteiden toteutuminen ei ole oppimistulosarviointien kohteena. Perusopetuksen oppimistulosarvioinneissa huomioidaan kuitenkin myös, että perusopetusta edeltävän varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen opetuksen tavoitteet linkittyvät perusopetuksen opetuksen tavoitteisiin, joten perusopetukseen tulevilla oppilailla on jo monenlaista osaamista.

1.2.2 Perusopetuksen opetussuunnitelma 2014

Vuonna 2014 hyväksyttiin uusi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (POPS) (OPH, 2014), joka otettiin porrastetusti käyttöön vuodesta 2016 alkaen. POPS esittelee seitsemän laaja-alaisen osaamisen aluetta:

1. Ajattelu ja oppimaan oppiminen
2. Kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu
3. Itsestä huolehtiminen ja arjen taidot

4. Monilukutaito
5. Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen
6. Työelämätaidot ja yrittäjyys
7. Osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävän tulevaisuuden rakentaminen

Perusopetuksessa rakennetaan oppilaiden laaja-alaista osaamista, joten kaikki eri oppiaineiden tavoitteet liittyvät vähintään yhteen laaja-alaisen osaamisen alueeseen. Matematiikan opetuksen tavoitteet liittyvät erityisesti tiettyihin laaja-alaisen osaamisen alueisiin, ja muihin laaja-alaisen osaamisen alueisiin ne liittyvät lähinnä menetelminä ja välineinä sekä kontekstin kautta.

Oppimistulosarvioinneissa yksittäisen tehtävän tarkoituksena ei ole mitata suoraan laaja-alaista osaamista tai sen eri alueiden hallintaa. Monipuolisten tehtävien, kontekstin ja taustakyselyiden avulla voidaan kuitenkin saada tietoa myös laaja-alaisesta osaamisesta. Lisäksi digitaalinen oppimistulosarviointijärjestelmä mahdollistaa uudenlaisia tehtävätyyppejä ja mittaamisen tapoja, jotka nekin saattavat tuottaa tietoa myös laaja-alaisesta osaamisesta. Näistä kuitenkin päätetään arviointikohtaisesti.

1.2.3 Matematiikka perusopetuksen opetussuunnitelmassa 2014

POPS 2014:n mukaan matematiikan opetuksen tehtävä kaikilla perusopetuksen vuosiluokilla on kehittää oppilaiden täsmällistä, loogista ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää myös oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti hyödyntäen mm. tieto- ja viestintäteknologiaa. Kumulatiivisuus, systemaattisuus, konkretia ja toiminnallisuus kuuluvat keskeisesti matematiikan opetukseen ja oppimiseen kaikilla vuosiluokilla.

Matematiikan oppiaineen tavoitteet on jaettu kolmeen tavoitealueeseen, jotka ovat Merkitys, arvot ja asenteet, Työskentelyn taidot ja Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet. *Merkitys, arvot ja asenteet* -tavoitealue poikkeaa muista tavoitealueista. Sen kaikki tavoitteet eivät suoraan liity matematiikan sisältöalueisiin tai niiden opettamiseen, oppimiseen ja osaamiseen, vaan se pitää sisällään yleisiä asennoitumistavoitteita ja oppimaan oppimisen taitoja, jotka auttavat näkemään matematiikan osana muita oppiaineita ja ympäröivää maailmaa. Vuosiluokilla 1–2 on tällä tavoitealueella yksi tavoite (T1), vuosiluokilla 3–6 yksi tavoite (T1) ja vuosiluokilla 7–9 kaksi tavoitetta (T1 ja T2).

Työskentelyn taidot -tavoitealueen tavoitteet sisältävät laajoja ja syviä taitoja, joita tarvitaan matematiikan oppimisessa ja käytössä sisällöstä riippumatta. Lähes kaikki nämä tavoitteet liittyvätkin jokaiseen matematiikan sisältöalueeseen. Vuosiluokilla 1–2 on tällä tavoitealueella kolme tavoitetta (T2–T4), vuosiluokilla 3–6 viisi tavoitetta (T2–T6) ja vuosiluokilla 7–9 seitsemän tavoitetta (T3–T9).

Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet -tavoitealueen tavoitteet liittyvät matematiikan oppiaineen eri sisältöalueisiin, jotka esitetään taulukossa 1. Osa tavoitteista liittyy johonkin yksittäiseen sisältöalueeseen ja osa useampaan. Vuosiluokilla 1–2 on tällä tavoitealueella kahdeksan tavoitetta (T5–T12), vuosiluokilla 3–6 kahdeksan tavoitetta (T7–T14) ja vuosiluokilla 7–9 yksitoista tavoitetta (T10–T20).

Taulukossa 1 esitellään POPS:n sisältöalueet vuosiluokittain. Taulukossa käytetään samoja sisältöalueiden nimiä kuin POPS:ssa, vaikka sisältöalueita ei ole nimetty ja numeroitu johdonmukaisesti samalla tavalla eri vuosiluokilla. Sisältöalueiden numerointi noudattaa vuosiluokkien 7–9 sisältöaluejakoa, koska oppimistulosarviointeja tehdään pääasiassa perusopetuksen päättövaiheessa. Muiden vuosiluokkien osalta sisältöalueet on numeroitu vastaamaan näiden vuosiluokkien jakoa, jotta matematiikan kumulatiivinen luonne ilmenee myös taulukosta.

TAULUKKO 1.

Sisältöalue	Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
S1	Ajattelun taidot	Ajattelun taidot	Ajattelun taidot ja menetelmät
S2	Luvut ja laskutoimitukset	Luvut ja laskutoimitukset	Luvut ja laskutoimitukset
S3		Algebra	Algebra
S4			Funktiot
S5	Geometria ja mittaaminen (S3)	Geometria ja mittaaminen (S4)	Geometria
S6	Tietojenkäsittely ja tilastot (S4)	Tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys (S5)	Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys

Vuosiluokilla 1–2 oppilas opettelee tekemään matemaattisia havaintoja ja päätelmiä. Oppilas opettelee ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan eri tavoin. Oppilas oppii lukumäärän, numeromerkin ja lukusanan. Aluksi oppilas operoi lukualueella 1–10 ja harjoittelee yhteen- ja vähennyslaskua. Myöhemmin lukualuetta laajennetaan alueelle 0–100. Oppilas oppii kymmenjärjestelmän, kertolaskun, jakolaskun ja mittaamisen periaatteet. Lisäksi oppilas oppii geometrisia käsitteitä ja perusteita tietojen käsittelystä.

Vuosiluokilla 3–6 oppilas laajentaa lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärrystään ja laskutaitonsa sujuvuutta. Hän oppii tekemään päätelmiä matemaattisten havaintojen perusteella. Oppilas osaa soveltaa aikaisemmin oppimaansa erityisesti kouluympäristössä ja oppii uusia matemaattisia käsitteitä ja merkintätapoja. Lisäksi hän oppii esittämään matemaattista ajatteluaan ja ratkaisujaan eri välineillä.

Vuosiluokilla 7–9 oppilas syventää matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä ja laajentaa matemaattista yleissivistystään ja algoritmista ajatteluaan. Hän oppii yhä laajemmin hyödyntämään ja soveltamaan aiemmin oppimaansa ja käyttämään matematiikkaa muissa oppiaineissa ja omassa elämässään esimerkiksi ongelmien ratkaisemiseen.

1.2.4 Opetussuunnitelman perusteiden uusi arviointiluku vuonna 2020

Vuoteen 2021 asti perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet määrittivät hyvän osaamisen kriteerit (arvosana 8) perusopetuksen päättövaiheessa, ja oppilaiden päättöarvosanat annettiin suhteessa näihin kriteereihin. Mikäli oppilaan taidot eivät täyttäneet hyvän osaamisen kriteereitä, hän saattoi saada arvosanakseen esimerkiksi 6 tai 7, mutta opettajalla ei ollut kriteerejä, joiden perusteella päättää, kumpi arvosana kuvaa oppilaan osaamista. Perusteasiakirjan arviointiluku oli laava ja kriteerit epätäsmällisiä, mikä johti vaihteleviin arviointikäytänteisiin. Karvin arviointienkin mukaan oppilaat saivat useissa oppiaineissa samantasoisella osaamisella vaihtelevia arvosanoja eri opettajilta ja eri kouluista. Oppilaat olivat siis epätasa-arvoisessa asemassa hakiessaan päättöarvosanoillaan toisen asteen opintoihin.

Opetushallitus julkaisi helmikuussa 2020 uuden opetussuunnitelman perusteiden arviointiluvun ja uudet Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit (OPH, 2020). Perusteiden mukaiset uudistukset tuotiin myös paikallisiin opetussuunnitelmiin. Muutokset astuivat voimaan lukuvuoden 2020–2021 alusta, ja siten ensimmäiset uusien kriteerien mukaiset päättöarviointien arvosanat annettiin vuoden 2022 keväällä. Tammikuussa 2023 Opetushallitus julkaisi uudet Perusopetuksen arvosanakriteerit kuudennen vuosiluokan päätteeksi (OPH, 2023), jotka ovat ensimmäistä kertaa käytössä kuudennen vuosiluokan arvioinnissa keväällä 2024.

Uudet kriteerit määrittelevät sekä yhdeksännelle että kuudennelle vuosiluokalle, millaista osaamista arvosanoihin 5, 7 ja 9 vaaditaan. Myös arvosanan 8 kriteerejä on täsmennetty. Opetussuunnitelman perusteissa määritellyt arvioinnin kriteerit ovat opetuksen järjestäjää sitovia normeja. Kriteerit on siis kirjattu paikallisiin opetussuunnitelmiin sellaisinaan. Uusien kriteerien tarkoituksena on yhdenmukaistaa oppilaiden arvosanoja niin, että samalla osaamistasolla saisi saman arvosanan opettajasta ja oppilaitoksesta riippumatta. Täsmennyksillä haluttiin varmistaa, että oppilaiden arviointi perustuu kansallisesti mahdollisimman yksiselitteisiin ja ymmärrettäviin linjauksiin.

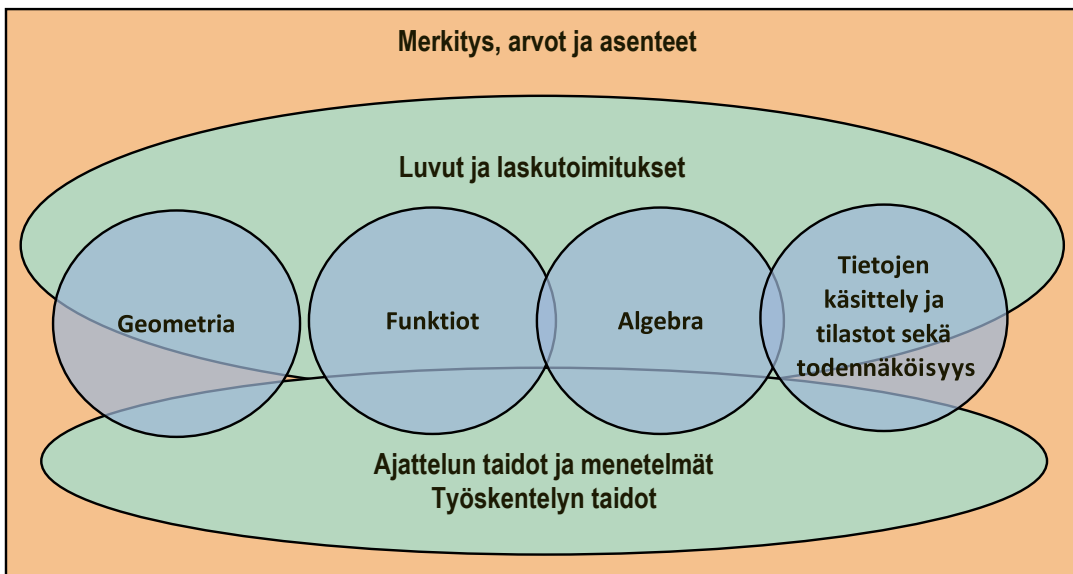
Matematiikan oppimistulosarviointien viitekehystyö käynnistyi vuonna 2018. Viitekehys valmistui vuonna 2019, ja sitä käytettiin ensimmäisen kerran vuodelle 2020 suunnitellussa 9. luokan matematiikan oppimistulosarvioinnin suunnittelussa ja valmistelussa. Koronapandemian takia arviointia siirrettiin kuitenkin lopulta vuoteen 2021. Viitekehystä täydennetään myöhemmin niin, että tulevaisuuden oppimistulosarvioinneissa voidaan ottaa huomioon myös uudet ja täsmennetyt arvosanojen kriteerit.

1.2.5 Viitekehystä varten tehdyt tulkinnat ja valinnat

Opetussuunnitelman perusteet on kirjoitettu siinä muodossa, että kaikki oppiaineisen tavoitteet ovat opetuksen tavoitteita. Oppimistulosarviointi ei kuitenkaan kohdistu opetuksen arvioinnin sijaan oppilaiden osaamisen arviointiin. Osaamista puolestaan arvioidaan mittarilla, joka mittaa opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden saavuttamista. Tämän takia viitekehyksessä matematiikan opetuksen tavoitteet on käännetty oppilaan osaamisen tavoitteiksi.

Kansainvälisissä osaamisen arvioinneissa käytetään usein kompetenssiajattelua. Kompetensseja on kuitenkin luokiteltu monin eri tavoin eikä globaalia yhtenäistä jaottelua ole, kuten esimerkiksi kielten oppimisessa (ks. keskustelu esimerkiksi Metsämuuronen, 2018). Opetussuunnitelman perusteissa esimerkiksi äidinkielen ja kirjallisuuden sisältöalueet ovat kompetensseja (esim. *Tekstien tuottaminen*) kun taas matematiikassa sisältöalueiksi on valittu sekä kompetensseja (esim. *Ajattelun taidot*) että aihealueita (esim. Geometria). Tämän vuoksi sisältöalueet eivät ole täysin rinnasteisia vaan osittain päällekkäisiä. Osa tavoitteista kattaa kaikki sisältöalueet, mutta osa kohdistuu vain tietyille sisältöalueelle. Tämän viitekehyksen laadinnassa on pääosin noudatettu POPS:n rakennetta, mutta joissain kohdin on selkeyden vuoksi poikettu POPS:n rakenteesta esimerkiksi pilkkomalla tavoitteita yksityiskohtiin.

Kuviossa 1 esitellään tämän viitekehyksen tulkinta tavoite- ja sisältöalueiden suhteista toisiinsa. Kuva hahmottelee sitä, miten sisältöalueet ovat päällekkäisiä sekä keskenään että tavoitealueiden kanssa. *Merkitys, arvot ja asenteet* -tavoitealue on asetettu kaiken muun pohjalle, koska sen tavoitteet liittyvät kaikkiin muihin alueisiin. Kuvioden pinta-ala ei tässä kuvassa edusta alueiden painoarvoa. Myöskään päällekkäin menevien osien ala ei kuvaa POPS:n mukaisia yhtenevien alueiden määrää. Sen sijaan päällekkäisyys kuvaa sitä, miten eri sisältöalueet linkittyvät toisiinsa.



KUVIO 1. Viitekehyksen tulkinta tavoite- ja sisältöalueiden suhteista

Ajattelun taidot ja menetelmät eroaa muista sisältöalueista siinä, että se läpäisee kaikki muut sisältöalueet ja se sisältää pikemminkin kykyjä ja taitoja, joita käytetään työkaluina muilla sisältöalueilla. Siksi jotkin samat tavoitteet toistuvat muillakin sisältöalueilla. *Ajattelun taidot ja menetelmät* ja *Työskentelyn taidot* ovat monelta osin päällekkäisiä, jolloin ne yhdessä syventävät

Käsitteellisten ja tiedonalakohtaisten tavoitteiden opiskelua ja oppimista. Matemaattisten ajattelun taitojen ja menetelmien mittaaminen kontekstista irrallisina taitoina on hyvin haastavaa. Sen sijaan niitä on luontevaa mitata osana muiden sisältöalueiden osaamista.

Sisältöalueista taas **Luvut ja laskutoimitukset** on sellainen, että sen tavoitetaitoja käytetään välineinä muilla sisältöalueilla. **Algebra** ja **Funktiot** taas ovat osittain päällekkäisiä sisältöalueita ja niillä on samoja tavoitteita. Niihin liittyvät tavoitteet on viitekehyksessä esitetty vain sen sisältöalueen kohdalla, johon niiden on erityisesti katsottu kuuluvan.

Tässä viitekehyksessä on annettu mm. *Työskentelyn taitoihin* liittyen esimerkkejä vaikkapa käytettävistä ohjelmistoista ja sähköisistä työkaluista, vaikka Opetussuunnitelman perusteissa ei niitä mainitakaan.

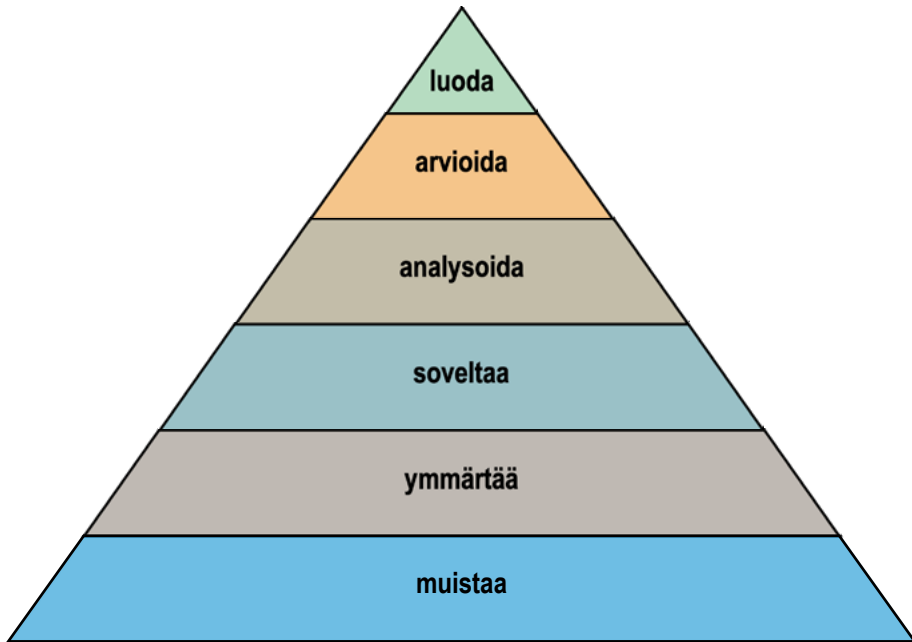
POPS:ssa yksi numeroitu tavoite saattaa sisältää yhden tai useamman eri osatavoitteen. Nämä numeroidut ja käännettyt osaamisen tavoitteet on pilkottu yksittäisiksi osatavoitteiksi. Esimerkiksi tavoite T14 vuosiluokilla 7–9 on pilkottu kahdeksi osatavoitteeksi tällä tavoin:

Opetussuunnitelman tavoite	Pilkottu tavoite
T14 ohjata oppilasta ymmärtämään tuntemattoman käsite ja kehittämään yhtälönratkaisutaitojaan	T14 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• ymmärtää tuntemattoman käsitteen• osaa ratkaista yhtälöitä.

1.3 Viitekehyksessä käytetty osaamisen luokittelujärjestelmä

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 valmistelussa on käytetty Bloomin taksonomiasta (Bloom, 1956) johdettua Andersonin–Krathwohlin taksonomiaa (Anderson & Krathwohl, 2000). Siksi matematiikan oppimistulosarviointien tehtävien laadinnassa on tarkoituksenmukaista hyödyntää tätä luokittelua, johon on otettu mukaan myös tiedon tasot. Nämä taksonomiat mahdollistavat osaamistavoitteiden mukaisten arviointikohteiden luokittelun vaatavuustason mukaan.

Bloomin taksonomiassa (Bloom ym. 1956) on kuusi hierarkkista tasoa: (1) muistaminen (2) ymmärtäminen, (3) soveltaminen, (4) analysointi, (5) syntetisointi ja (6) arviointi. Vastaavasti Andersonin ja Krathwohlin (2001) taksonomiassa tasot on nimetty verbimuodossa, ja hierarkian ylemmät tasot poikkeavat Bloomin taksonomiasta: (1) muistaa (2) ymmärtää, (3) soveltaa, (4) analysoida, (5) arvioida ja (6) luoda (Kuva 2). Andersonin–Krathwohlin taksonomia on Bloomin taksonomiasta johdettu laajennus, jossa on mukana myös neljä tiedon tasoa. Lisäksi kognitiivisen prosessin ulottuvuudet on muutettu substantiiveista aktiivisiksi verbeiksi. Usein kolmen ensimmäisen tason jälkeen tulevat tasot analysoida, arvioida ja luoda yhdistetään ”korkeammiksi ajattelun taidoiksi”.



KUVIO 2. Andersonin–Krathwohlin taksonomia hierarkkisena pyramidirakenteena

Kuviossa 2 esitellään Andersonin–Krathwohlin taksonomia ja eri tasoja kuvaavat yleiset esimerkit. **Faktatiedoksi** luokitellaan sellaiset perustiedot, jotka ovat välttämättömiä ongelmien ratkaisuun. **Käsitetiedoksi** voidaan määritellä perusrakenteiden keskinäiset suhteet ja rakenteet, joiden ymmärtäminen on välttämätöntä päästäkseen taksonomian ylemmille tasoille. **Menetelmätieto** taas kertoo siitä, miten ja milloin tietoa on järkevä käyttää. **Metakognitiivinen tieto** puolestaan on laajin tiedon tasoista. Se sisältää mm. ajattelun taitoja, tiedon käsittelyn taitoja, tiedon hankkimisen taitoja. Metakognitiivisen tiedon omaksuminen edellyttää kolmen muun tiedon tason hallintaa.

TAULUKKO 2. Andersonin–Kratzwohlin taksonomia täydennettynä toiminnallisilla verbeillä ja yleisillä esimerkeillä

	1. Muistaa	2. Ymmärtää	3. Soveltaa	4. Analysoida	5. Arvioida	6. Luoda
	esim. muistaa, tunnistaa	esim. tulkitsee, havainnollistaa, summaa, päättelee, luokittelee, vertailee, selittää	esim. hyödyntää, käyttää tietoja käytännössä	esim. erottelee, jäsentää ja järjestää tietoa uudelleen, liittää tietoa uusiin yhteyksiin, yhdistää syitä ja seurauksia, erottaa oleellisen tiedon epäoleellisesta	esim. päättelee annettujen kriteerien perusteella, tarkastellee kriittisesti asioita	esim. yhdistää johdonmukaisesti ja toimivasti tiedon elementtejä toisiinsa, suunnittelee, tuottaa
Faktatieto	Muistaa tai tunnistaa termejä tai yksittäisiä asioita.	Osaa kertoa omin sanoin. Osaa havainnollistaa esimerkiksi kuvalla.	Osaa hyödyntää faktatietoa tehtävän ratkaisemisessa. Osaa tehdä päätelmiä osaamiensa faktojen perusteella.	Osaa erotella oppimiaan faktoja. Osaa jäsentää faktoja esimerkiksi hierarkkisesti. Osaa yhdistää syitä ja seurauksia.	Arvioi faktojen luotettavuutta. Osaa tehdä päätelmiä tuntemiensa faktojen perusteella. Näkee, miten syy voi vaikuttaa seuraukseen.	Tuottaa itselleen uutta tietoa faktojen perusteella. Keksii esimerkiksi itselleen uusia sääntöjä tai määritelmiä faktatiedon perusteella.
Käsitetieto	Nimeää käsitteitä. Osaa yhdistää käsitteen selitykseen tai kuvaan.	Osaa selittää käsitteen merkityksen. Osaa havainnollistaa käsitettä antamalla esimerkin.	Osaa luokitella käsitteitä. Osaa käyttää käsitetietoja tehtävän ratkaisemisessa.	Osaa tehdä loogisia päätelmiä tietojensa perusteella. Osaa tehdä hierarkkisia käsitkarttoja.	Havaitsee yhtäläisyyksiä ja eroja kahden käsitteen välillä.	Osaa muodostaa erilaisia syy-seurausmalleja.
Menetelmä-tieto	Osaa käyttää rutiininomaista menetelmää tutun tehtävän ratkaisemisessa.	Osaa valita sopivan menetelmän tehtävän ratkaisemiseen.	Osaa käyttää tuntemiaan menetelmiä myös uusissa tilanteissa.	Osaa käyttää sopivia menetelmiä oikeilla tavoilla ja järkevässä järjestyksessä myös uusissa konteksteissa. Kykenee tekemään ennakoiteja ja oletuksia lopputuloksesta.	Pystyy arvioimaan, mikä menetelmä sopii parhaiten tietyn ongelman ratkaisemiseksi.	Kehittää vaihtoehdoisen tai uuden menetelmän ongelman ratkaisemiseksi.
Meta-kognitiivinen tieto	Osaa luoda muistisääntöjä. Tietää, että matematiikka koostuu universaaleista säännöistä.	Tietää, milloin mitään menetelmää käytetään. Tietää, että määritelmät ja valinnat vaikuttavat lopputuloksiin ja päätelmiin.	Osaa selittää esimerkin avulla, miksi jotakin menetelmää tai käsitettä käytetään tiettyssä tilanteessa.	Pystyy tulkitsemaan prosessin vaikutusta lopputulokseen ja tekemään yleistyksiä. Osaa analysoida virheen syitä.	Osaa eritellä syitä, jotka ovat vaikuttaneet tuloksiin ja niiden tulkintaan ja luotettavuuteen.	Pystyy luomaan uuden tai paremman prosessin, jolla tietty ongelma voidaan ratkaista.

Tynjälän (1999) mukaan metakognitiiviset tietokomponentit voidaan jakaa kolmeen tyyppiin:

1. tiedot ja käsitykset itsestä (ja muista) tiedonkäsittelijänä
2. tiedot erilaisista tehtävistä ja niiden suorittamisesta (esim. *"Tarvitsen näitä tietoja, jotta voin ratkaista tämän tehtävän."*)
3. tiedot erilaisista strategioista (esim. *"Tällaisessa päässä laskuongelmassa kannattaa käyttää tätä päässä laskustrategiaa."*)

Tässä viitekehyksessä metakognitiiviset tiedot on tulkittu pääasiallisesti "tietona tiedosta", jolloin ensimmäisen tyyppin tiedot eli tiedot ja käsitykset itsestä on jätetty tiedon syvyyssulottuvuusluokituksen ulkopuolelle. Näitä tietoja voidaan mahdollisuuksien mukaan kartoittaa taustakyselyiden yhteydessä, mutta niitä ei arvioida oppimistulosten yhteydessä.

Kummassakin taksonomiassa tasot ovat hierarkkisia eli ylempi taso vaatii korkeampaa ajattelua kuin alempi ja se sisältää alemmat ajattelun tasot. Perusopetuksessa oppilas siirtyy oppimisessaan yksinkertaisesta tiedon muistamisesta haastavampaan ja monimutkaisempaan **matemaattiseen** ajatteluun ja tiedon syvyyteen ja **tiedon soveltamiseen**.

Perusopetuksen
opetus-
suunnitelman
perusteiden
tavoitteet ja
arvioinnin
kohteet

2

Tässä luvussa esitellään perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaiset matematiikan oppiaineen opetuksen tavoitteet käännettyinä oppilaan osaamisen tavoitteiksi. Kukin numeroitu tavoite (esim. T14) saattaa sisältää yhden tai useamman osatavoitteen. Useampia erillisiä osatavoitteita sisältävät numeroidut tavoitteet on pilkottu taulukkoon yksittäisiksi tavoitteiksi. Ne on kirjattu taulukkoon siten, että numeroidun tavoitteen kohdalla on esitetty ranskalaisin viivoin kaikki tavoitteen alle kuuluvat osatavoitteet. Jotkin osatavoitteet on numeroitu eri tavalla kuin POPS:ssa. Lisäksi osaan tavoitteista on lisätty konkretiaa POPS:n sisältöalueilta.

2.1 Matematiikan kaikkiin sisältöalueisiin liittyvät tavoitealueet

AVAINSANAT

matemaattisten havaintojen tekeminen, matematiikan kielentäminen, minäpystyvyys, motivaatio, päätelmien tekeminen, ratkaisujen esittäminen, ratkaisustrategiat, tieto- ja viestintäteknologian käyttäminen, yhteyksien havaitseminen, yhteistyötaidot

Tässä luvussa esitellään *Merkitys, arvot ja asenteet* - ja *Työskentelyn taidot* -tavoitealueiden tavoitteet. Nämä tavoitteet liittyvät kaikkiin matematiikan sisältöalueisiin, joten ne esitellään tässä kootusti. Yllä olevassa laatikossa oleva avainsanalista kattaa nämä molemmat tavoitealueet.

Taulukossa 3 esitellään *Merkitykseen, arvoihin ja asenteisiin* liittyvät tavoitteet. Nämä tavoitteet läpäisevät kaikki matematiikan sisältöalueet. Näiden tavoitteiden toteutumista ei arvioida oppimistulosarvioinneissa tehtävillä. Niitä voidaan kuitenkin kartoittaa taustakyselyiden avulla. Kaikkien oppimistulosarviointien taustakyselyissä käytetään samoja asennekysymyksiä. Näin voidaan sekä verrata asenteita eri oppiaineiden välillä että saada trenditietoa asenteiden kehittymisestä.

TAULUKKO 1. Merkitys, arvot ja asenteet -tavoitealueen tavoitteet

MERKITYS, ARVOT JA ASEENTEET		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T1 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• uskoo omiin kykyihinsä matematiikan osaajana• on innostunut oppimaan lisää	T1 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• uskoo omiin kykyihinsä matematiikan osaajana• on innostunut oppimaan lisää	T1 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• uskoo omiin kykyihinsä matematiikan osaajana• on innostunut oppimaan lisää
		T2 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• vastaa itse omasta matematiikan oppimisestaan• osaa opiskella matematiikkaa myös yhdessä muiden kanssa

Taulukossa 4 esitellään *Työskentelyn taitoihin* liittyvät tavoitteet. Nämä tavoitteet läpäisevät kaikki sisältöalueet. Nämä tavoitteet on laadittu ennen kaikkea tuntityöskentelyn ja formatiivisen arvioinnin näkökulmasta, joten kaikkien näiden tavoitteiden toteutumista ei ole mahdollista arvioida summatiivisissa oppimistulosarvioinneissa. Näiden tavoitteiden toteutumista ei myöskään arvioida sellaisenaan, vaan ne liittyvät aina yhteen tai useampaan sisältöalueeseen ja tuovat kognitiivisen prosessin syvyyden aspektin tehtäviin.

TAULUKKO 2. Työskentelyn taidot -tavoitealueen tavoitteet

TYÖSKENTELEN TAI DOT		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T2 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • tehdä havaintoja matematiikan näkökulmasta • tulkita tekemiään havaintoja • hyödyntää havaintojaan eri tilanteissa 	T2 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • havaita yhteyksiä oppimensa asioiden välillä 	T3 Oppilas <ul style="list-style-type: none"> • osaa havaita yhteyksiä oppimensa asioiden välillä • ymmärtää yhteyksiä oppimensa asioiden välillä
T4 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • tehdä päätelmiä 	T3 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • esittää kysymyksiä • tehdä perusteltuja päätelmiä matemaattisten havaintojensa pohjalta 	
T3 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • esittää ratkaisujaan useammalla kuin yhdellä tavalla • esittää päätelmiään useammalla kuin yhdellä tavalla 	T4 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • esittää ratkaisujaan useammalla kuin yhdellä tavalla • esittää päätelmiään useammalla kuin yhdellä tavalla 	T4 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • käyttää matemaattisia merkintätapoja • käyttää matemaattisia käsitteitä suullisesti ja kirjallisesti
T4 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • ratkaista ikätasolleen sopivia matemaattisia ongelmia • tehdä matemaattisia päätelmiä 	T5 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • ratkaista ikätasolleen sopivia matemaattisia ongelmia 	T5 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • ratkaista loogista ja luovaa ajattelua vaativia matemaattisia ongelmia • käyttää erilaisia ratkaisustrategioita
	T6 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • arvioida ratkaisun järkevyyttä • arvioida tuloksen mielekkyyttä 	T6 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • arvioida ratkaisun järkevyyttä • kehittää ratkaisujaan • arvioida tuloksen mielekkyyttä
		T7 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • soveltaa matematiikkaa muissa oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa
		T8 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • kerätä tietoa • jäsentää tietoa • analysoida tietoa • tarkastella tietoa kriittisesti
		T9 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • soveltaa tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opiskelussa sekä ongelmien ratkaisemisessa

2.2 Matematiikan käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet

Tässä luvussa esitellään matematiikan *Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet* -tavoitealueen eri sisältöalueisiin liittyvät tavoitteet. Kunkin sisältöalueluvun alkuun on kerätty kooste avainsanoista, jotka kuvaavat sisältöalueen keskeisiä aihealueita, ja loppupäähän on kerätty taulukkoon POPS:ssa esiintyvistä opetuksessa käsiteltävistä aiheista vuosiluokittain.

Matematiikan kumulatiivinen luonne aiheuttaa sen, että ensimmäisillä vuosiluokilla oppimisen kohteina ovat ne tiedot ja taidot, joita myöhemmin käytetään välineinä muiden aiheiden oppimiseen, jolloin niitä ei enää aseteta tavoitteiksi. Sen sijaan joitakin aihealueita syvennetään ja laajennetaan myöhemmillä vuosiluokilla, jolloin ne myös toistuvat tavoitetaulukoissa. Opetussuunnitelmassa tavoitteiden asettamisessa on siis osittain oletettu, että oppilas on saavuttanut aiempien vuosiluokkien tavoitteet. Sisältöalueiden tavoitteet on kunkin alaluvun lopussa luokiteltu Andersonin–Krathwohlin taksonomian eri tasoille.

Andersonin–Krathwohlin taksonomia ulottuu faktatiedon muistamisesta metakognitiivisen tiedon luomiseen asti. Se on siis hyvin laaja osaamisen luokittelujärjestelmä. POPS:n tavoitteet ja arvosanan 8 kriteerit sisältävät elementtejä taksonomiataulukon eri tasoilta, mutta ne painottuvat kognitiivisen prosessin alemmille tasoille. Oppimistulosarvioinneissa voidaan kuitenkin mitata POPS:n tavoitteita laajempaa ja syvempää matematiikan osaamista, sillä tarkoituksena on myös kartoittaa osaamisen eroja ääripäiden välillä.

2.2.1 Sisältöalue 1: Ajattelun taidot ja menetelmät

AVAINSANAT

algoritminen ajattelu, luokittelu, ohjelmointi, päättely, riippuvuus, todistaminen, totuusarvo, vaiheittainen toiminta

Vuosiluokilla 1–2 oppilas oppii matemaattisen ja algoritmisen ajattelun alkeet opettelemalla matemaattisia käsitteitä ja merkintätapoja sekä ohjeen mukaan toimimista. Vuosiluokilla 3–6 oppilas syventää matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä ja oppii soveltamaan algoritmista ajattelua suunnittelemalla ja toteuttamalla yksinkertaisia tietokoneohjelmia. Vuosiluokilla 7–9 oppilas harjoittelee loogista ajattelua ja päättelykykyä. Lisäksi hän syventää algoritmista ajattelua ja oppii soveltamaan sitä ongelmien ratkaisemiseen.

Taulukossa 5 esitetään *Ajattelun taidot ja menetelmät* -sisältöalueen POPS:n mukaiset numeroidut tavoitteet jaoteltuna verbien mukaan. Joihinkin POPS:n mukaisiin tavoitteisiin on tuotu konkretiaa tältä sisältöalueelta.

TAULUKKO 5. Ajattelun taidot ja menetelmät -sisältöalueen tavoitteet

AJATTELUN TAIDOT JA MENETELMÄT		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T5 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none"> • matemaattisia käsitteitä • matemaattisia merkintätapoja 	T7 Oppilas <ul style="list-style-type: none"> • ymmärtää matemaattisia käsitteitä ja merkintöjä • osaa käyttää matemaattisia käsitteitä ja merkintöjä 	T10 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • tehdä matemaattisia päätelmiä • laskea päässä • käyttää taitojaan eri konteksteissa
T12 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • laatia vaiheittaisia toimintaohjeita • toimia ohjeen mukaan 	T14 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • laatia toimintaohjeita tietokoneohjelmoina graafisessa ohjelmointiympäristössä 	T20 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none"> • ajatella algoritmisesti • käyttää algoritmisia ja matemaattisia taitojaan ongelmien ratkaisemiseen • ratkaista ongelmia myös ohjelmoiden

Taulukossa 6 esitellään POPS:ssa esiintyvät *Ajattelun taidot ja menetelmät* -sisältöalueen opetuksessa käsiteltävät aiheet vuosiluokittain.

TAULUKKO 6. Sisältöalueen Ajattelun taidot ja menetelmät keskeiset sisällöt

AJATTELUN TAIDOT JA MENETELMÄT		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
enemmän – vähemmän, erilaisuus, järjestys, luokittelu, matemaattinen tilanne, merkintätavat, samanlaisuus, suurempi – pienempi, syy-seuraus, säännönmukaisuus, vaiheittainen toiminta, vertailu, yhtäläisyys, yhtä paljon	järjestys, luokittelu, ohjelmien suunnittelu ja toteuttaminen graafisessa ohjelmointiympäristössä, systemaattinen testaus, syy-seuraus, säännönmukaisuus, vaiheittainen toiminta, vertailu, yhtäläisyys	algoritminen ajattelu, looginen ajattelu, matemaattisen tekstin (esim. kirjoitettu teksti, puhe, kuva, video) tulkitseminen ja tuottaminen, ohjelmointikäytänteiden harjoittelu, sääntöjen ja riippuvuuksien etsiminen ja esittäminen, perustelu, päättely, tietokoneohjelmien soveltaminen matematiikan opiskelussa, todistamisen perusteet, vaihtoehtojen lukumäärien pohtiminen

2.2.2 Sisältöalue 2: Luvut ja laskutoimitukset

AVAINSANAT

desimaaliluku, itseisarvo, jaollisuus, kymmenjärjestelmä, laskusäännöt, lukualueet, lukujono, lukukäsité, murtoluku, neliöjuuri, peruslaskutoimitukset, potenssi, prosentti, tekijä

Vuosiluokilla 1–2 oppilas oppii lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän periaatteet. Lisäksi oppilas oppii peruslaskutoimitukset. Vuosiluokilla 3–6 oppilas syventää ymmärrystään kymmenjärjestelmästä ja oppii hyödyntämään sen ominaisuuksia. Oppilas oppii laskemaan yhteen ja vähentämään rationaaliluvuilla ja hyödyntämään peruslaskutoimitusten ominaisuuksia. Vuosiluokilla 7–9 oppilas oppii käyttämään lukuihin ja laskutoimituksiin liittyviä taitojaan eri konteksteissa. Oppilas osaa peruslaskutoimitukset rationaaliluvuilla ja ymmärtää reaalityön käsitteen. Lisäksi oppilas hallitsee prosentin käsitteen ja prosenttilaskun.

Taulukossa 7 esitetään *Luvut ja laskutoimitukset* -sisältöalueen POPS:n mukaiset numeroidut tavoitteet jaoteltuna verbien mukaan. Joihinkin POPS:n mukaisiin tavoitteisiin on tuotu konkretiaa tältä sisältöalueelta.

TAULUKKO 3. Luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueen tavoitteet

LUVUT JA LASKUTOIMITUKSET		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T5 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">matemaattisia käsitteitämatemaattisia merkintätapoja	T7 Oppilas <ul style="list-style-type: none">ymmärtää matemaattisia käsitteitä ja merkintöjäosaa käyttää matemaattisia käsitteitä ja merkintöjä	T10 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">tehdä matemaattisia päätelmiälaskea päässäkäyttää taitojaan eri konteksteissa
T6 Oppilas <ul style="list-style-type: none">ymmärtää lukumäärän, numeromerkin ja lukusanan yhteydenosaa kymmenjärjestelmän periaatteet	T8 Oppilas <ul style="list-style-type: none">ymmärtää kymmenjärjestelmän rakenteenosaa hyödyntää kymmenjärjestelmää	T12 Oppilas <ul style="list-style-type: none">ymmärtää reaalityön käsitteen
T7 Oppilas <ul style="list-style-type: none">osaa peruslaskutoimituksia luonnollisilla luvuilla*tuntee peruslaskutoimitusten ominaisuuksia <p>* yhdistettynä tavoitteet T7 ja T8</p>	T9 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">peruslaskutoimituksia kokonaisluvuillayhteen- ja vähennyslaskun positiivisilla rationaaliluvuilla	T11 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">peruslaskutoimituksia rationaaliluvuilla
T8 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">käyttää erilaisia päässälaskestrategioita	T10 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">hyödyntää laskutoimitusten ominaisuuksia päässälaskeksissa ja kirjallisesti	T13 Oppilas <ul style="list-style-type: none">ymmärtää prosentin käsitteenosaa laskea prosenttiosuuden, prosenttiluvun osoittaman määrän, muutos- ja vertailuprosentin

Taulukossa 8 esitellään POPS:ssa esiintyvät *Luvut ja laskutoimitukset* -sisältöalueen opetuksessa käsiteltävät aiheet vuosiluokittain.

TAULUKKO 8. Sisältöalueen Luvut ja laskutoimitukset keskeiset sisällöt

LUVUT JA LASKUTOIMITUKSET		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
jakolaskun periaate, järjestys, kertolasku (1–5, 10), kokonainen, kymmenjärjestelmä, liitännäisyys, lukujen ominaisuudet (hajotelmat, monikerta, parillisuus, puolittaminen), lukujono, lukukäsite (lukumäärä, lukusana, numeromerkki), luonnolliset luvut, osa, peruslaskutoimitukset, päässä-laskustrategiat, vaihdannaisuus, vähennyslasku (1–100), yhteenlasku (1–100)	desimaaliluvut, jaollisuus, kertotaulut (1–10), kokonaisluvut, kymmenjärjestelmä, likiarvo, lukuyksikkö, luvun merkintätavat, murtoluvut, negatiiviset kokonaisluvut, ositusjako, peruslaskutoimitukset, positiiviset rationaaliluvut, prosentin käsite (murtoluvun, desimaaliluvun ja prosenttiluvun yhteys), prosenttiarvo, prosenttiluku, pyöristäminen, päässä-laskustrategiat, sisältöjako, suuruusluokka, tekijä	alkutekijä, eksponentti (kokonaisluku), itseisarvo, käänteisluku, likiarvo, neliöjuuri, peruslaskutoimitukset desimaaliluvuilla, murtoluvuilla ja negatiivisilla luvuilla, potenssi, prosentti (prosenttiluvun osoittama määrä, prosenttiosuus, muutosprosentti, muuttunut arvo, perusarvo), pyöristäminen, rationaaliluvut, reaali-luvut, sieventäminen, tarkka arvo, vastaluku, vertailuprosentti

Taulukossa 9 esitetään sisältöalueen Luvut ja laskutoimitukset -tavoitteet jaoteltuna Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoille. Taksonomiataulukko on täydennetty siten, että jokaiselta tiedon ja kognitiivisen prosessin tasolta on jokin esimerkki.

TAULUKKO 9. Esimerkkejä Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoilta Luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueella

	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
Faktatieto	Muistaa ja tunnistaa numeromerkit, lukusanat ja laskutoimitusmerkit.	Tunnistaa lukualueen eri lukuja ja osaa nimetä niitä. Osaa asettaa lukuja suuruusjärjestykseen.	Tunnistaa prosentin käsitteen ja osaa laskea prosenttiosuuksia. Tietää, miten prosenttikäsite liittyy lukualueen muihin lukuihin.	Hahmottaa lukusuoralla lukujen sijoittelua. Oppilas osaa kuvata laskutoimitusten idean. Osaa verrata eri lukujärjestelmien lukuja.	Ymmärtää eri lukualueiden lukujen erot. Osaa kertoa perusteluja lukusuoralla olevien lukujen sijaintien oikeellisuudelle.	Osaa kehittää oman laskustrategian, joka on hänelle itselleen uusi. Osaa kertoa itselleen uudesta lukujärjestelmästä ja käyttää sitä aiemmin oppimansa perusteella.
Käsitetieto	Tunnistaa murtoluvut. Osaa kirjoittaa kuulemansa/lukemansa luvun numeroina tai lukea numeroina ilmaistun luvun sanoina.	Osaa yhdistää murtoluvun ja sitä vastaavan desimaaliluvun.	Osaa muuttaa prosenttiluvun murtoluvuksi.	Osaa kielentää tai ilmaista kuvallisesti kymmenjärjestelmän periaatteita.	Osaa kielentää eroja ja yhtäläisyyksiä lukualueen lukujen välillä. Osaa valita luvulleärkevimman esittämistavan tietyssä kontekstissa.	Osaa tietojensa perusteella luoda mindmapin lukualueista.
Menetelmä-tieto	Tunnistaa itseisarvomerkin.	Ymmärtää potenssimerkinnän yhteyden muihin laskutoimituksiin.	Osaa laskea peruslaskutoimituksia käyttäen kymmenjärjestelmää	Osaa pilkkoa sanallisen tehtävän osiin ratkaisun löytämiseksi. Osaa tehdä matemaattisesti mielekkäitä kysymyksiä liittyen lukuihin ja niillä laskemiseen.	Osaa laatia toimintaohjeita tietokoneelle.	Osaa kielentää omia erilaisia laskustrategioitaan.
Meta-kognitiivinen eto	Osaa kertoa, mitä laskutoimituksessa tehdään ja missä järjestyksessä.	Tietää, mitä menetelmää kannattaa käyttää sanallisen tehtävän ratkaisemiseen.	Osaa esittää ratkaisuvaihtoehtoja annettuun mekaaniseen laskutehtävään.	Osaa soveltaa prosenttikäsitettä erilaisissa konteksteissa.	Osaa kertoa esitetystä ratkaisuehdotuksesta, mikä siinä on mennyt pieleen ja miksi.	Osaa ratkaista ongelman algoritmisesti.

2.2.3 Sisältöalue 3: Algebra

AVAINSANAT

ensimmäisen asteen yhtälö, epäyhtälö, lauseke, muuttuja, polynomi, sieventäminen, toisen asteen yhtälö, tuntematon, verrannollisuus, yhtälö, yhtälönratkaisu, yhtälöpari

Vuosiluokilla 3–6 oppilas oppii lisää lukujonotaitoja ja tutustuu tuntemattoman käsitteeseen. Lisäksi oppilas harjoittelee yhtälön ratkaisemista päättelämällä ja kokeilemalla. Vuosiluokilla 7–9 oppilas ymmärtää tuntemattoman ja muuttujan käsitteet sekä osaa ratkaista erilaisia yhtälöitä ja yhtälöpareja graafisesti ja algebrallisesti.

Taulukossa 10 esitetään *Algebra* -sisältöalueen POPS:n mukaiset numeroidut tavoitteet jaoteltuna verbien mukaan. Joihinkin POPS:n mukaisiin tavoitteisiin on tuotu konkretiaa tältä sisältöalueelta.

TAULUKKO 10. Algebra -sisältöalueen tavoitteet

ALGEBRA	
Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T7 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">• matemaattisia käsitteitä• matemaattisia merkintätapoja	T14 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• ymmärtää tuntemattoman käsitteen• osaa ratkaista yhtälöitä
	T15 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">• muuttujan käsitteen

Taulukossa 11 esitellään POPS:ssa esiintyvät *Algebra* -sisältöalueen opetuksessa käsiteltävät aiheet vuosiluokittain.

TAULUKKO 11. Sisältöalueen Algebra keskeiset sisällöt

ALGEBRA	
Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
lukujono, tuntemattoman käsite, yhtälön periaate, yhtälön ratkaisu päättelämällä ja kokeilemalla	1. asteen epäyhtälö, 1. asteen yhtälö, (vaillinainen), 2. asteen yhtälö, lauseke, lausekkeen arvo, lukujono, muuttuja, polynomi (yhteenlasku, vähennyslasku ja kertolasku), sieventäminen, tuntemattoman käsite, verrannollisuus, yhtälöpari (algebrallinen ja graafinen ratkaisu)

Taulukossa 12 esitetään *Algebra*-sisältöalueen tavoitteet jaoteltuna Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoille. Taksonomiataulukko on täydennetty siten, että jokaiselta tiedon ja kognitiivisen prosessin tasolta on jokin esimerkki.

TAULUKKO 12. Esimerkkejä Andersonin–Kratzwohlin taksonomian tasoilta Algebra-sisältöalueella

	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
Faktatieto	Tunnistaa käsitteen tuntematon.	Tunnistaa lukujonosta säännönmukaisuuden. Tunnistaa algebrallisen lausekkeen osat.	Tietää, mitä tarkoittaa yhtälön ratkaiseminen.	Osaa erottaa toisistaan muuttujan ja vakiotermin.	Osaa päätellä yhtälön ratkaisun suuruusluokan joko kontekstista tai yhtälön muodosta.	Osaa kehittää oman matemaattisesti järkevän lukujonon.
Käsitetieto	Tunnistaa muuttujan	Erotaa muuttujan ja tuntemattoman toisistaan. Erotaa polynomilausekkeen ja yhtälön toisistaan.	Osaa ratkaista yhtälön laskemalla.	Osaa laajentaa osaamistaan yhtälöistä. Tunnistaa lukujonon yleisen muodon.	Osaa kuvailla eroja ja yhtäläisyyksiä yhtälöiden, epäyhtälöiden ja potenssilausekkeiden välillä.	Osaa perustella lukujonojen jatkoa matemaattisesti oikein.
Menetelmä-tieto	Osaa ratkaista yksinkertaisen yhtälön päättelämällä.	Erotaa toisistaan yhtälön, epäyhtälön ja polynomilausekkeen ja osaa kielentää eron.	Osaa ratkaista ensimmäisen asteen yhtälön oppilaalle uudessa tilanteessa.	Osaa päätellä yhtälön ja epäyhtälön ratkaisun suuruusluokan.	Osaa valita tarkoituksenmukaisen ratkaisumenetelmän yhtälölle tai polynomien yhteen/vähennyslaskulle.	Osaa muodostaa yhtälön tai epäyhtälön avoimeen tehtävään.
Meta-kognitiivinen tieto	Tunnistaa muuttujan ja tuntemattoman eron. Tietää, että muuttujan arvo vaikuttaa lausekkeen arvoon.	Tunnistaa lukujonon ja sen algebrallisen lausekkeen yhteyden.	Osaa ratkaista yhtälöparin graafisesti. Osaa ratkaista epäyhtälön.	Osaa muodostaa annetusta sanallisesta ongelmasta matemaattisen lausekkeen.	Osaa etsiä/löytää virheen yhtälön/ epäyhtälön/yhtälöparin ratkaisusta.	Osaa muodostaa yhtälön tai epäyhtälön, jonka avulla annettu sanallinen ongelma ratkeaa.

2.2.4 Sisältöalue 4: Funktiot

AVAINSANAT

funktio, funktion arvo, kulmakerroin, kuvaaja, leikkauspiste, lineaarifunktio, nollakohta, paraabeli, riippuvuus, suora, vakiotermi, verrannollisuus

Vuosiluokilla 7–9 oppilas ymmärtää funktion käsitteet sekä osaa tulkita ja tuottaa funktion kuvaajia.

Taulukossa 13 esitetään *Funktiot* -sisältöalueen POPS:n mukaiset numeroidut tavoitteet jaoteltuna verbien mukaan. Joihinkin POPS:n mukaisiin tavoitteisiin on tuotu konkretiaa tältä sisältöalueelta.

TAULUKKO 13. Funktiot -sisältöalueen tavoitteet

FUNKTIOT
Vuosiluokat 7–9
T14 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• ymmärtää tuntemattoman käsitteen• osaa ratkaista yhtälöitä
T15 Oppilas <ul style="list-style-type: none">• ymmärtää funktion käsitteen• osaa tulkita funktion kuvaajia• osaa tuottaa funktion kuvaajia

Taulukossa 14 esitellään POPS:ssa esiintyvät *Funktiot* -sisältöalueen opetuksessa käsiteltävät aiheet vuosiluokittain.

TAULUKKO 14. Sisältöalueen Funktiot keskeiset sisällöt

FUNKTIOT
Vuosiluokat 7–9
funktio, funktion kasvaminen, funktion kuvaaja, funktion nollakohta, funktion väheneminen, koordinaatisto, kulmakerroin, paraabeli, riippuvuus (graafisesti ja algebrallisesti), suora, tuntemattoman käsite, vakiotermi, verrannollisuus (suoraan ja kääntäen)

Taulukossa 15 esitetään *Funktiot*-sisältöalueen tavoitteet jaoteltuna Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoille. Taksonomiataulukko on täydennetty siten, että jokaiselta tiedon ja kognitiivisen prosessin tasolta on jokin esimerkki.

TAULUKKO 15. Esimerkkejä Andersonin–Kratzwohlin taksonomian tasoilta Funktiot-sisältöalueella

	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
Faktatieto	Ymmärtää, mikä on tuntematon.	Osaa kuvailla funktion kulmakertoine vaikutusta funktion kuvaajaan.	Osaa kuvata funktion kulkua sanallisesti.	Tunnistaa säännönmukaisuuksia funktioissa.	Tunnistaa kahden ilmiön välisen korrelaation.	Osaa käyttää riippuvuuden käsitettä arkielämän tekstissä.
Käsitetieto	Tunnistaa kulmakertoimen ja vakiotermin käsitteet.	Tietää, mikä on funktion nollakohta ja osaa etsiä sen.	Tunnistaa funktion ja verrannollisuuden välisen yhteyden.	Löytää yhteyksiä kahden suureen välillä ja osaa kuvata yhteyden matemaattisesti.	Osaa vertailla käsitteitä muuttujan ja funktion arvo.	
Menetelmä-tieto	Tunnistaa kääntäen verrannollisuuden arkielämän tilanteissa. Löytää vakiotermin ja kulmakertoimen funktion lausekkeesta.	Osaa tuottaa funktion kuvaajan	Osaa ratkaista graafisesti funktion nollakohdan/t	Osaa tulkita ja kielentää funktion Osaa kuvailla kulmakertoimen vaikutuksia funktion kuvaajaan.	Hahmottaa verrannollisuuden käsitteen ja suoraan verrannolliset suureet ja kääntäen verrannolliset.	
Meta-kognitiivinen tieto	Osaa käyttää dynaamisen geometrian ohjelmaa funktion havainnollistamiseen.	Ymmärtää funktion ja yhtälön ratkaisemisen välisen yhteyden.	Osaa kirjoittaa lausekkeen ongelman ratkaisemiseksi.	Osaa kertoa omia esimerkkejä suoraan ja kääntäen verrannollisuudesta.	Osaa ottaa huomioon kontekstin riippuvuuksia arvioitaessa.	Osaa muodostaa annetun sanallisen ongelman perusteella funktion ja analysoida sen kulkua ratkaistakseen annetun ongelman.

2.2.5 Sisältöalue 5: Geometria

AVAINSANAT

jana, kappaleet, kulma, kolmion ominaisuudet, koordinaatisto, mittaaminen, mittakaava, monikulmio, piiri, pinta-ala, piste, pituus, Pythagoraan lause, suora, suureet, symmetria, tasokuviot, tilavuus, trigonometriset funktiot, yksikön muunnos, yhdenmuotoisuus, yhtenevyys, ympyrän ominaisuudet

Vuosiluokilla 1–2 oppilas oppii tekemään havaintoja tasokuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksista ja tunnistamaan niitä. Lisäksi oppilas oppii mittaamisen periaatteen. Vuosiluokilla 3–6 oppilas oppii havainnoimaan, kuvailemaan ja luokittelemaan geometrisia kappaleita ja kuvioita. Lisäksi oppilas oppii käyttämään ja arvioimaan eri standardimittayksiköitä ja pohtimaan mittaustuloksen järkevyyttä. Vuosiluokilla 7–9 oppilas osaa laskea pinta-aloja ja tilavuuksia. Lisäksi oppilas osaa hyödyntää kolmion ja ympyrän ominaisuuksia.

Taulukossa 16 esitetään *Geometria* -sisältöalueen POPS:n mukaiset numeroidut tavoitteet jaoteltuna verbien mukaan. Joihinkin tavoitteisiin on tuotu konkretiaa tältä sisältöalueelta.

TAULUKKO 16. Geometria -sisältöalueen tavoitteet

GEOMETRIA		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T5 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">matemaattisia käsitteitämatemaattisia merkintätapoja	T7 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">matemaattisia käsitteitämatemaattisia merkintätapoja	T16 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">geometrian käsitteitägeometristen käsitteiden välisiä yhteyksiä
T9 Oppilas <ul style="list-style-type: none">tunnistaa geometrisia tasokuvioita ja kappaleitaosaa tehdä havaintoja tasokuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksista	T11 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">havainnoida kappaleiden ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksiakuvailla kappaleiden ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksia	T18 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">laskea pinta-alojalaskea tilavuuksia
T10 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">mittaamisen periaatteen	T12 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">arvioida mittauskohteen suuruuttavalita mittaamiseen sopivan välineenvalita sopivan mittayksikönpohtia mittaustuloksen järkevyyttä	
		T17 Oppilas <ul style="list-style-type: none">ymmärtää suorakulmaiseen kolmioon ja ympyrään liittyviä ominaisuuksiaosaa hyödyntää suorakulmaiseen kolmioon ja ympyrään liittyviä ominaisuuksia

Taulukossa 17 esitellään POPS:ssa esiintyvät *Geometria* -sisältöalueen opetuksessa käsiteltävät aiheet vuosiluokittain.

TAULUKKO 17. Sisältöalueen Geometria keskeiset sisällöt

GEOMETRIA		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
kappaleet (kuutio, pallo), kellonaika ja ajanyksiköt (vuosi, kuukausi, viikko, vuorokausi, tunti, minuutti, sekunti), kolmiulotteisen ympäristön tasogeometrian havaitseminen, luokittelu erilaisten ominaisuuksien mukaan, piirtäminen ja rakentaminen, mittaamisen periaate, mittayksiköt (metri, senttimetri, kilogramma, gramma, litra ja desilitra), suunta ja sijainti, suureet (pituus, massa, tilavuus, aika), tasokuviot (kolmio, nelikulmio, neliö, suorakulmio, ympyrä)	jana, kappaleet (kartio, lieriö, pyramidi, suorakulmainen särmiö, ympyrälieriö, ympyräpohjainen kartio), kappaleiden geometriset ominaisuudet (tilavuus), koordinaatisto, kulman ominaisuudet (aste, kulman suuruus, oikokulma, suora kulma, terävä kulma, tylppä kulma, täyskulma), mittakaava (pienennös, suurennos), mittaaminen, mittaustulos, mittavälineen ja mittayksikön valinta, piste, suora, symmetria (suoran suhteen, kierto- ja siirtosymmetria), tasokuviot (monikulmio), tasokuvioiden geometriset ominaisuudet (piiri, pinta-ala), yksikkömuunnokset	geometrinen konstruointi, pinta-ala (kolmio, nelikulmio, monikulmio, ympyrä), puolisuora, Pythagoraan lause, suorakulmaisen kolmion ominaisuudet, Thaleen lause, tilavuus (kartio, lieriö, pallo), trigonometriset funktiot (sini, kosini, tangentti), viiva, yhdenmuotoisuus, yhtenevyys, yksikkömuunnokset, ympyrän ominaisuudet (kaarit, kehä, kehäkulma, keskuskulma, sektori)

Taulukossa 18 esitetään *Geometria*-sisältöalueen tavoitteet jaoteltuna Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoille. Taksonomiataulukko on täydennetty siten, että jokaiselta tiedon ja kognitiivisen prosessin tasolta on jokin esimerkki.

TAULUKKO 18. Esimerkkejä Andersonin–Kratzwohlin taksonomian tasoilta Geometria-sisältöalueella

	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
Faktatieto	Tunnistaa geometria käsitteitä nimeltä ja kuvasta.	Osaa kuvailla sanallisesti tai piirtämällä geometrian peruskäsitteitä.	Osaa päätellä geometristen kuvioiden ominaisuuksia.	Osaa kuvailla geometristen kuvioiden ominaisuuksia.	Löytää tekstistä/ kuvasta geometrisia virheellisyyksiä/ epätarkkuuksia.	Pystyy kuvailemaan itselleen uuden kuvion/kappaleen ominaisuuksia geometrisesti järkevällä tavalla.
Käsitetieto	Osaa piirtää geometrisia peruskäsitteitä.	Osaa piirtää/kuvailla geometrisia kuvioita ja niiden ominaisuuksia.	Osaa luokitella kuvioita, kappaleita ja mittausvälineitä.	Tunnistaa symmetrian.	Osaa vertailla ja kuvailla geometrisia käsitteitä.	Osaa kielentää kuvion riippuvuussuhteita.
Menetelmä-tieto	Osaa nimetä mittavälineitä ja tehdä perusmittauksia, ml. kulman mittaus.	Oppilas osaa hyödyntää tuntemiaan geometrian käsitteitä uudessa tilanteessa.	Osaa laskea kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia ja soveltaa Pythagoraan lausetta.	Osaa valita oikean mittavälineen ja päätellä tuloksen järjestyks.	Osaa vertailla tehtävän ratkaisumahdollisuuksia.	Osaa hyödyntää suorakulmaisen kolmion erityispiirteitä ongelmanratkaisutehtävissä.
Meta-kognitiivinen tieto	Tunnistaa oikeat laskumenetelmät kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksien laskemiseen ja Pythagoraan lauseen soveltamiseen.	Tunnistaa geometristen käsitteiden eroja ja yhtäläisyyksiä.	Osaa soveltaa oppimiaan geometrian käsitteitä uusissa konteksteissa.	Osaa luokitella geometrisia käsitteitä ja niiden ominaisuuksia.	Osaa ratkaista käytännön ongelmanratkaisutehtäviä.	Osaa käyttää geometristä osaamistaan avoimissa suunnittelutehtävissä.

2.2.6 Sisältöalue 6: Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys

AVAINSANAT

data, diagrammi, mahdollinen, mahdoton, satunnaisuus, taulukko, tietojen käsittely, tilasto, todennäköisyys, tilastolliset tunnusluvut, varma

Vuosiluokilla 1–2 oppilas oppii laatimaan ja tulkitsemaan yksinkertaisia taulukoita. Vuosiluokilla 3–6 oppilas oppii laatimaan ja tulkitsemaan erilaisia taulukoita ja diagrammeja sekä käyttämään tilastollisia tunnuslukuja. Lisäksi oppilas oppii todennäköisyyslaskennan alkeita. Vuosiluokilla 7–9 oppilas oppii määrittämään tilastollisia tunnuslukuja, laskemaan todennäköisyyksiä ja käyttämään prosenttilaskentaa tilastollisissa yhteyksissä.

Taulukossa 19 esitetään *Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys* -sisältöalueen POPS:n mukaiset numeroidut tavoitteet jaoteltuna verbien mukaan. Joihinkin tavoitteisiin on tuotu konkretiaa tältä sisältöalueelta.

TAULUKKO 19. Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys -sisältöalueen tavoitteet

TIETOJEN KÄSITTELY JA TILASTOT SEKÄ TODENNÄKÖISYYS		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
T5 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">matemaattisia käsitteitämatemaattisia merkintätapoja	T7 Oppilas ymmärtää <ul style="list-style-type: none">matemaattisia käsitteitämatemaattisia merkintätapoja	
T11 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">laatia yksinkertaisia taulukoita ja pylväsdiagrammejatulkita yksinkertaisia taulukoita ja pylväsdiagrammeja	T13 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">laatia taulukoita ja diagrammejatulkita taulukoita ja diagrammejakäyttää tilastollisia tunnuslukujapäätellä, onko tapahtuma mahdoton, mahdollinen vai varma	T19 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">määrittää tilastollisia tunnuslukujalaskea todennäköisyyksiä
		T13 Oppilas osaa <ul style="list-style-type: none">käyttää prosenttilaskua tilastollisissa yhteyksissä

Taulukossa 20 esitellään POPS:ssa esiintyvät *Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys* -sisältöalueen opetuksessa käsiteltävät aiheet vuosiluokittain.

TAULUKKO 20. Sisältöalueen Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys keskeiset sisällöt

TIETOJEN KÄSITTELY JA TILASTOT SEKÄ TODENNÄKÖISYYS		
Vuosiluokat 1–2	Vuosiluokat 3–6	Vuosiluokat 7–9
diagrammi, taulukko, tietojen kerääminen, tietojen tallentaminen	diagrammit, keskiarvo, mahdollinen, mahdoton, pienin arvo, suurin arvo, taulukot, tietojen käsitteleminen, tyypiarvo, varma	diagrammit, frekvenssi, hajonta, mediaani, prosenttiluvun osoittama määrä kokonaisuudesta, tietojen käsitteleminen, prosenttiosuus, suhteellinen frekvenssi, taulukot, todennäköisyys

Taulukossa 21 esitetään *Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys* -sisältöalueen tavoitteet jaoteltuna Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoille. Taksonomiataulukko on täydennetty siten, että jokaiselta tiedon ja kognitiivisen prosessin tasolta on jokin esimerkki.

TAULUKKO 21. Esimerkkejä Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoilta Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys -sisältöalueella

	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
Faktatieto	Tunnistaa, sanat diagrammi ja osaa nimetä erilaisia diagrammeja. Tunnistaa sanat keskiarvo, tyyppiarvo ja mediaani.	Osaa kuvata sanallisesti keskilukujen ominaisuuksia. Osaa kuvata, mitä tarkoittaa todennäköisyys.	Osaa tulkita diagrammeja.	Osaa analysoida diagrammeja. Osaa käyttää prosenttilaskentaa tilastollisissa yhteyksissä.	Osaa tulkita eri tavoin esitettyjä tilastoja.	Löytää aineistosta dataa, jota tehtävänannossa ei mainita.
Käsitieto	Muistaa keskiluvut ja niiden merkityksen. Tunnistaa erilaisia diagrammeja osaa nimetä ne.	Ymmärtää keskilukujen erot ja yhtäläisyydet. Ymmärtää todennäköisyyden käsitteen.	Osaa laskea keskiarvon ja määrittää mediaanin ja tyyppiarvon. Osaa kertoa sanallisesti, milloin tapahtuma on varma tai todennäköinen.	Osaa lukea tilastoja ja tehdä niistä johtopäätöksiä. Ymmärtää todennäköisyyksien laskentatavan.	Osaa kuvata tilastoa graafisesti. Osaa päätellä todennäköisyyksiä arkielämän tilanteista.	Osaa valita tilanteeseen sopivan tilastollisen tunnusluvun ja perustella valintansa.
Menetelmä-tieto	Tietää erilaisia tapoja tilaston esittämiseksi.	Osaa laatia taulukoita ja diagrammeja.	Osaa arvioida arki tilanteiden todennäköisyyksiä. Osaa valita eri tilanteisiin järkevimmän diagrammin.	Osaa tulkita diagrammeja ja kielentää niiden antamaa tietoa.	Osaa valita oikean diagrammityypin tai keskiluvun havainnollistaakseen ilmiötä.	Osaa ratkaista tilastollisen tehtävän usealla eri tavalla.
Meta-kognitiivinen tieto	Osaa täyttää taulukko-laskentaohjelmaan tietoja sanallisesti esitetystä tilastosta.	Osaa kielentää keskilukujen välisen eron.	Osaa laskea tilastosta prosentiosuuksia ja hyödyntää taulukkolaskentaa.	Osaa suhtautua kriittisesti tilastojen pohjalta laadittuihin uutisiin. Oppilas osaa laskea todennäköisyyksiä.	Osaa arvioida tilaston esitystavan tarkoituksenmukaisuutta.	Ymmärtää tilastojen ja todennäköisyyksien mahdollisuudet vaikuttamisessa ja osaa kertoa esimerkkejä.

Arvioinnin toteuttamisen periaatteita

3

Tässä luvussa kuvataan yksittäisen matematiikan oppimistulosarviointihankkeen toteutuksen vaiheet ja käsitellään oppilaiden osaamismittarin ja tehtävien laatimista. Tehtävien laatimisen tueksi viitekehysten loppuun on koottu liitteeksi esimerkkejä tehtävämahdollisuuksista matematiikan oppiaineen sisältöalueille Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasojen mukaisesti.

3.1 Arviointihankkeen vaiheet

Matematiikan oppimistulosarviointihanke aloitetaan nimittämällä arviointi- ja tehtävänlaadintaryhmät, joihin kutsutaan matematiikan aihealueiden ja opetuksen asiantuntijoita. Tehtävänlaadintaryhmä laatii tehtäviä opetussuunnitelman eri sisältöalueilta huomioiden tiedon eri tasot. Tehtävistä koostetaan vähintään kaksi erilaista tehtäväsarjaa eli mittaria, jotka ovat osittain päällekkäisiä tehtäviltään. Nämä tehtäväkokonaisuudet esitellään kyseisen ikäluokan oppilailla siten, että noin puolet testajista tekee toisen version ja puolet toisen. Esitelluksen perusteella valitaan parhaiten kyseisen vuosiluokan osaamista mittaavat ja erottelevat tehtävät varsinaiseen arviointiin.

Varsinaisen arvioinnin otokseen kuuluville kouluille tiedotetaan arvioinnista ensimmäisen kerran noin puoli vuotta ennen arvioinnin toteutusta. Arvioinnin muodosta ja toteutuksesta riippuen kouluilla on eri määrä esivalmistelua. Koulun rehtori vastaa arviointiprosessin toteutuksesta koulussa. Arviointi toteutetaan kouluissa yhtenä tai useampana päivänä Karvin ohjeiden mukaan. Suuri osa monivalintatehtävistä voidaan pisteyttää automaattisesti. Opettajat pisteyttävät oppilaiden tuottamistehtävistä sellaiset, joita ei voida automaattisesti pisteyttää. Lopullisesta pisteytyksestä vastaa Karvi. Laadun varmistamiseksi tuottamistehtävät myös sensoroidaan. Oppilaiden vastausten analysoimisesta, tulosten koostamisesta ja raporttoimisesta vastaa Karvi.

3.2 Mittarin laatimiseen liittyviä näkökulmia

Oppimistulosarvioinneissa pyritään kansallisen osaamistason selvittämiseen. Tällaisella tuhansien oppilaiden otospohjaisella arvioinnilla ei ole tarkoitus arvioida yksittäisen oppilaan osaamista. Sen sijaan arviointien tarkoituksena on saada luotettava ja yleistettävä kuva arvioitavan ikäluokan keskimääräisestä kansallisesta osaamisesta ja osaamisen hajonnasta, jolloin yksittäisen oppilaan vastauksen painoarvo on pieni.

Oppimistulosarviointi voidaan toteuttaa joko osin tai kokonaan digitaalisesti. Tehtävät laaditaan siten, että ne toimivat yhteismitallisesti sekä suomeksi että ruotsiksi. Tehtävien vastauksia voidaan vaatia esimerkiksi sanallisessa tai kuvallisessa muodossa suullisesti tai kirjallisesti. Arvioinnissa voidaan käyttää erilaisia tehtävätyyppejä, kuten *monivalinta-*, *täydennys-*, *yhdistely-*, *järjestely-* ja *tuottamistehtäviä*.

Mittari eli osaamista mittaava tehtäväsarja laaditaan siten, että se on osuva eli validi ja tarkka eli reliaabeli. Kultakin matematiikan sisältöalueelta tulee olla riittävän monta tehtävää tiedon ja kognitiivisen prosessin eri tasoille, jotta saadaan kattava kuva oppilaiden osaamisesta. Vaikka tehtävät laaditaan Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasojen mukaisesti, tietylle tasolle laadittu tehtävä ei välttämättä yksittäisen oppilaan kohdalla edusta tätä tasoa. Esimerkiksi matemaattinen todistustehtävä, joka tyypillisesti laaditaan mittaamaan kognitiivisen prosessin ylempiä tasoja, voikin yksittäiselle oppilaalle olla pelkkä muistamistehtävä, jolloin hän voi luetella todistuksen vaiheet muistinsa varaisesti ymmärtämättä niitä. Tehtävänlaadinnassa tämäkin aspekti pitää ottaa huomioon tehtävänannoissa esimerkiksi vaatimalla perusteluja, pyytämällä oppilasta kuvaamaan muutoksesta johtuvia seurauksia tai antamalla oppilaalle uusia määritelmiä, joita hänen pitää soveltaa.

Kaikkien matematiikan kuuden eri sisältöalueen arviointitehtävien laadinnassa on tärkeää, että ne ovat monipuolisia, eri sisältöalueita edustavia, vaikeustasoltaan riittävän hyvin erottelevia sekä sopivassa suhteessa teoreettisia että soveltavia tehtäviä. Keskeistä arviointitehtävien laadinnassa on se, että Andersonin–Krathwohlin taksonomian eri tasoja on hyödynnetty mahdollisimman monipuolisesti. Tehtävien tulee mitata faktatietoa, käsitetietoa, menetelmätietoa ja metakognitiivista tietoa kognitiivisen prosessin eri tasoilla.

3.3 Yksittäisen tehtävän laatimiseen liittyviä näkökulmia

Tämän luvussa käsitellään kaikkien vuosiluokkien ja sisältöalueiden tavoitteita yhdessä Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasoilla. Niitä ei ole erikseen luokiteltu vuosiluokittain tai sisältöalueittain.

Seuraavassa esitellään taulukoissa tehtävämahdollisuuksia ja esimerkkejä sisältöalueittain kultakin Andersonin–Krathwohlin taksonomian tasolta. Näitä esimerkkitehtäviä ei ole tarkoitus käyttää oppimistulosarvioinneissa sellaisenaan, vaan ne ovat tukena ja mallina tehtävänlaadinnassa. Ajattelun taitoja mitataan pääosin muiden sisältökokonaisuuksien osana.

Tehtävissä pyritään huomioimaan mahdollisimman paljon yhteisiä oppilaiden omaan elämään liittyviä konteksteja kuten esimerkiksi liikkuminen, musiikki, luonto, ruoanvalmistus (reseptit), talous (raha), rakennukset ja tutkimus. Matematiikan kumulatiivisuuden huomiointi tulee parhaiten esille pohdintatehtävissä Andersonin–Krahtwohlin tasolla kuusi, mutta tehtävä voidaan myös laatia sellaiseksi, että se etenee tasolta toiselle.

Ajattelun ja työskentelyn taitojen mittaaminen tulee mukaan erityisesti tehtävissä, joissa oppilaan on osattava kirjoittaa matemaattista tekstiä, pääteltävä matemaattisesti perustellen, laadittava toimintaohjeita tietokoneelle tai pilkottava tehtävä osiin algoritmisesti. Tieto- ja viestintätekniikan taidot ovat työskentelyn taidoissa keskeisessä roolissa ja niiden arviointi on merkittävässä roolissa monen sisältöalueen tehtävissä.

Liitteessä 1 esitellään tehtävämahdollisuuksia kaikille matematiikan oppiaineen sisältöalueille Andersonin–Krahtwohlin taksonomian tasojen mukaisesti.

Lähteet

- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (toim.) (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Complete edition.* New York: Longman.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain.* David McKay Company.
- Karvi. (2020). Suomen kieli ja kirjallisuus. Arvioinnin viitekehys 2018. Julkaisut 17:2020. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. https://karvi.fi/wp-content/uploads/2020/08/KARVI_1720.pdf
- Kauppinen, M. & Marjanen, J. (2020). Millaista on yhdeksäsluokkalaisten kielellinen osaaminen? – Suomen kielen ja kirjallisuuden oppimistulokset perusopetuksen päättövaiheessa 2019. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus, Julkaisuja 13:2020. https://karvi.fi/wp-content/uploads/2020/08/KARVI_1320.pdf
- Metsämuuronen, J. (2018). Common Framework for Mathematics – Discussions of Possibilities to Develop a Set of General Standards for Assessing Proficiency in Mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 13–39. <https://doi.org/10.12973/iejme/2693>
- OPH (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Määräykset ja ohjeet 2014:96. Opetushallitus. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf
- OPH (2020). Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit. Opetushallituksen määräys OPH-5042-2020. Opetushallitus. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/Perusopetuksen%20p%C3%A4%C3%A4tt%C3%B6arvioinnin%20kriteerit%2031.12.2020_1.pdf
- OPH (2023). Perusopetuksen arvosanakriteerit kuudennen vuosiluokan päätteeksi. Opetushallituksen määräys OPH-172-2023. <https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/Perusopetuksen%20arvosanakriteerit%20kuudennen%20vuosiluokan%20p%C3%A4%C3%A4tteeksi.pdf>
- Tynjälä, P. (1999). Oppiminen tiedon rakentamisena: konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Kirjayhtymä.

Liitteet

LIITE 1. Tehtävämahdollisuuksia matematiikan oppiaineen sisältöalueille

TAULUKKO 1. Tehtävämahdollisuuksia sisältöalueelle Luvut ja laskutoimitukset

Luvut ja laskutoimitukset		
AK 1 MUISTAA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas tunnistaa numeromerkit, lukujen merkitsemisen sekä summan, erotuksen, tulon, osamäärän, itseisarvon, neliöjuuren ja piin matemaattiset merkit.	Monivalinta- tai yhdistämistehtävä: Oppilas osaa etsiä oikeat matemaattiset merkit erilaisten merkkien joukosta.
Käsitieto	Oppilas osaa nimetä laskutoimitusmerkit ja kielentää niiden merkityksen matemaattisesti oikein.	Täydennystehtäviä: Oppilas osaa valita oikeat laskutoimitusmerkit oikeisiin paikkoihin laskutoimituksissa.
Menetelmätieto	Oppilas osaa laskea käyttäen peruslaskutoimituksia. Vuosiluokilla 7–9 oppilas osaa käyttää koko lukualueita peruslaskutoimituksia tehdessään.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita laskuun oikean vastauksen. Avotehtävä: Oppilas osaa muodostaa annettuun vastaukseen sopivan laskun (tehtävään voi liittää reunaehjoja tilanteen mukaan). Esimerkiksi oppilaalle kerrotaan, että tehtävän vastaus on viisi ja hänen pitää keksiä tehtävänanto tai lauseke.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa kuvata laskutoimituksia ja kertoa esimerkiksi potenssimerkinnän yhteyden muihin laskutoimituksiin.	Päätelytehtävä: Oppilas osaa päätellä ja ilmoittaa kysytyyn arvon ja ylemmillä luokilla myös etumerkin. Esim. (-1) potenssiin 101).
AK 2 YMMÄRTÄÄ		
Faktatieto	Oppilas tunnistaa lukualueen eri lukuja ja osaa nimetä niitä	Sijoittamistehtävä: Oppilas osaa sijoittaa lukusuoralle kaikkia lukualueen lukuja. Tehtävä vaikeutuu, kun lukusuorana käytetään muuta kuin perinteistä kokonaisluvuille jaettua lukusuoraa.
Käsitieto	Oppilas ymmärtää erot ja yhtäläisyydet lukualueen eri lukujen välillä. Oppilas tunnistaa itseisarvomerkin.	Kirjoitustehtävä: Oppilas osaa kirjoittaa sanallisesti sanottuja "isoja" lukuja numeroin (esim. 1001, 9090) tai vastaavasti kirjoittaa numeroina annettuja lukuja sanallisesti. Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa sijoittaa lukuja eri lukualueille Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kielentää lukualueen lukujen ominaisuuksia.
Menetelmätieto	Oppilas osaa käyttää potenssimerkintää muiden laskutoimitusten yhteydessä.	Täydennystehtävä: Oppilas osaa täydentää laskutoimitukseen puuttuvat laskutoimitusmerkit tai luvut. Tehtävässä voi olla useita laskutoimituksia ja ylemmillä luokilla myös itseisarvoja.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa soveltaa kymmenjärjestelmän periaatteita sanallisiin tehtäviin.	Täydennystehtävä: Oppilas osaa päätellä ratkaisun tehtävään, esimerkiksi "mihin lukuun on lisättävä 300, jotta saataisiin tuloksena 573". Vuosiluokilla 7–9 voidaan käyttää vastaavia päätelytehtäviä hyödyntäen muita peruslaskutoimituksia ja rationaalilukuja.

AK 3 SOVELTAA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas tunnistaa prosentin käsitteen ja osaa laskea prosenttiosuuksia. Oppilas tietää, miten prosenttikäsite liittyy lukualueen muihin lukuihin.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita oikean suuruksen alennuksen, kun tiedetään alennusprosentti
Käsitetieto	Oppilas ymmärtää prosenttikäsitteen ja sen yhteyden kymmenjärjestelmään. Oppilas ymmärtää rationaalilukujen yhteyden kymmenjärjestelmään.	Päätelytehtävä: Oppilas osaa päätellä alennusprosentin, kun alennuksen suuruus on tiedossa.
Menetelmätieto	Oppilas osaa ratkaista sanallisia ongelmia hyödyntäen prosentin käsitettä.	Laskutehtävä: Oppilas osaa muokata reseptiä tehtävänannon mukaisesti (kaksinkertainen, puoli annosta, neljännesannosta). Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea peruslaskutoimituksia rationaaliluvuilla. Voidaan toteuttaa myös aukko- tai monivalintatehtävänä.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa esittää useita ratkaisuvaihtoehtoja annettuun mekaaniseen laskutehtävään hyödyntäen erilaisia laskustrategioita ja osaa kertoa, miksi ne sopivat tilanteeseen.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita oikeat prosessit vaihtoehtojen joukosta (monta oikeaa vastausta). Laskutehtävä: Oppilas osaa esittää kolme erilaista ratkaisuvaihtoehtoa tehtävälle 47-12+18 tai tehtävälle, jossa mukana on rationaalilukuja, ja perustella ne.
AK 4 ANALYSOIDA		
Faktatieto	Oppilas hahmottaa lukusuoralla lukujen sijoittelua. Oppilas osaa kuvata laskutoimitusten idean.	Yhdistelytehtävä: Oppilas osaa yhdistää luvut 3 ja pii oikeisiin lukualueisiin. Tehtävässä on käytettävä erilaisia lukusuoria, jotta oppilas joutuu pohtimaan asiaa.
Käsitetieto	Oppilas osaa kielentää tai ilmaista kuvallisesti kymmenjärjestelmän periaatteita.	Kuvailutehtävä: Oppilas kielentää lukujen eroja ja yhtäläisyyksiä sekä suuruusluokkia. (0,01; 1; -5; 5 %; pii jne.). Avotehtävä: Oppilas osaa erottaa väittämistä virheelliset ja perustella valintansa, esim. "summa on aina pienempi kuin sen tekijät".
Menetelmätieto	Oppilas osaa esittää matemaattisesti järkeviä kysymyksiä.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa tehdä kaksi matemaattisesti oikeaa kysymystä annetun aineiston perusteella. Alemmilla luokilla aineisto voi olla kuvallinen. Avotehtävä: Oppilas osaa muodostaa tutkimushypoteesin annetun aineiston perusteella.
Meta-kognitiivinen tieto	Oppilas osaa tehdä järkeviä matemaattisia päätelmiä ja yleistyksiä annetun aineiston pohjalta.	Aineisto- ja monivalintatehtävä: Oppilas osaa tehdä matemaattisesti oikeita päätelmiä annetun aineiston perusteella (tavaraa x on enemmän/vähemmän, koska jne.). Tuottamistehtävä: Oppilas osaa tehdä aineiston perusteella järkeviä laskutehtäviä tai kysymyksiä.

AK 5 ARVIOIDA		
Faktatieto	Oppilas ymmärtää tarkan arvon ja likiarvon eron.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita tilanteeseen sopien joko tarkan arvon tai likiarvon. Ylemmillä luokilla mukana voi olla myös π ja $\sqrt{2}$.
Käsitieto	Oppilas osaa kielentää likiarvon ja tarkan arvon eron.	Kuvailutehtävä: Oppilas osaa kielentää eron esimerkiksi lukujen $1/3$ ja $0,333333$ välillä.
Menetelmätieto	Oppilas osaa valita vastaukseen sopivan esitysmuodon ja perustella valintansa.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää tehtävän ja siihen parhaiten soveltuvan vastausmuodon tarkkuuden ja kontekstin mukaan (muotona kokonaislukuja, desimaalilukuja, joissa on eri määrä desimaaleja ja murtolukuja).
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa soveltaa prosenttikäsitettä erilaisissa konteksteissa.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa luettuaan kuvauksen matemaattisesta tapahtumasta päätellä ja kertoa, miten eri kohdissa valittu tarkka arvo tai likiarvo on vaikuttanut lopputulokseen.
AK 6 LUODA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas ymmärtää eri lukujärjestelmien idean. Oppilas osaa kehittää oman laskustrategian, joka on hänelle itselleen uusi.	Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea binaariluvuilla, kun tehtävässä on kuvattu laskumenetelmä.
Käsitieto	Oppilas osaa kielentää erilaisia laskustrategioita.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kertoa, miten laskutoimitus vaikuttaa lopputulokseen ja millaisissa tapauksissa tämä sääntö toimii.
Menetelmätieto	Oppilas osaa vertailla eri laskustrategioiden paremmuutta.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistääärkevimmän laskustrategian erilaisiin laskutehtäviin ja myös kielentää valintansa. Soveltamistehtävä: Oppilas osaa luoda uuden laskumenetelmän, kun hänelle on esitetty yksi laskutapa.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa ratkaista annetun sanallisen avoimen ongelman, jossa saattaa olla useita oikeita ratkaisuvaihtoehtoja.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa tehdä sarjan matemaattisesti mielekkäitä laskutehtäviä, joilla hän voi ratkaista aineiston (kuva/teksti) pohjalta annetun ongelman.

TAULUKKO 2. Tehtävämahdollisuuksia sisältöalueelle Algebra

Algebra		
AK 1 MUISTAA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas tunnistaa yhtälön. Oppilas tunnistaa polynomin.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa löytää vaihtoehtojen joukosta polynomin
Käsitieto	Oppilas tietää yhtälön ja polynomin eron ja osaa kertoa sen.	Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa löytää yhtälöt ja polynomit erilaisten lausekkeiden joukosta ja osaa lajitella ne.
Menetelmätieto	Oppilas osaa ratkaista yhtälön päätelemällä.	Laskutehtävä: Oppilas osaa ratkaista yksinkertaisen yhtälön päätelemällä.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas tunnistaa muuttujan ja tuntemattoman eron.	Tunnistamis- ja avotehtävä: Oppilas osaa etsiä lausekkeista/yhtälöistä muuttujan/tuntemattoman ja nimetä ne. Oppilas osaa kertoa muuttujan/tuntemattoman vaikutuksesta lausekkeen arvoon.
AK 2 YMMÄRTÄÄ		
Faktatieto	Oppilas tunnistaa lukujonon.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa tunnistaa vaihtoehtoista lukujonon.
Käsitieto	Oppilas osaa päätellä lukujonon säännön mukaisuuden.	Avotehtävä: Oppilas osaa jatkaa annettuja lukujonoja matemaattisesti oikein.
Menetelmätieto	Oppilas löytää annetun lukujonon säännön mukaisuuden.	Kuvailutehtävä: Oppilas osaa kielentää lukujonon muodostamisperiaatteen ja kuvata sen joko algebrallisesti tai tekstinä.
Meta-kognitiivinen tieto	Oppilas osaa yhdistää lukujonon ja sen algebrallisen lausekkeen yhteyden	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää lukujonon seuraavan jäsenen ja lukujonon algebrallisen lausekkeen toisiinsa.
AK 3 SOVELTAA		
Faktatieto	Oppilas tietää, mitä tarkoittaa yhtälön ratkaiseminen.	Avotehtävä: Oppilas osaa antaa esimerkin yhtälön ratkaisutavoista.
Käsitieto	Oppilas osaa ratkaista yhtälön graafisesti.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa yhtälön ja epäyhtälön eron.
Menetelmätieto	Oppilas osaa ratkaista yhtälön laskemalla.	Ongelmanratkaisutehtävä: Oppilas osaa selvittää, onko luku 30 mukana lukujonossa, joka on muotoa $4n+2$.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa ratkaista yhtälön tilanteeseen sopivalla tavalla ja perustella valintansa.	Piirtämis- ja avotehtävä: Oppilas osaa ratkaista yhtälöparin graafisesti ja perustella menetelmän käytön ja ratkaisunsa. Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää epäyhtälön ja kuvallisen ratkaisun toisiinsa.

AK 4 ANALYSOIDA		
Faktatieto	Oppilas osaa erottaa toisistaan muuttujan ja vakiotermin.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa tunnistaa lausekkeista muuttujat.
Käsitieto	Oppilas osaa laajentaa osaamistaan yhtälöistä toisen asteen yhtälöön.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää termejä muuttuja, tuntematon, yhtälö ja epäyhtälö toisiinsa.
Menetelmätieto	Oppilas osaa ratkaista vaillinaisen toisen asteen yhtälön. Oppilas osaa sieventää polynomilausekkeita.	Laskutehtävä: Oppilas osaa ratkaista haluamallaan tavalla vaillinaisen toisen asteen yhtälön tai epäyhtälön.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa muodostaa annetusta sanallisesta ongelmasta yhtälön tai epäyhtälön.	Yhtälön muodostaminen: Oppilas osaa muodostaa sanallisesta tehtävästä yhtälön, yhtälöparin tai epäyhtälön, jonka avulla ongelma voidaan ratkaista. Oppilas osaa kuvata ratkaisun eri vaiheet.
AK 5 ARVIOIDA		
Faktatieto	Oppilas osaa päätellä yhtälön ratkaisun suuruusluokan joko kontekstista tai yhtälön muodosta.	Yhdistelytehtävä: Oppilas osaa valita oikean etumerkin yhtälön ratkaisuun
Käsitieto	Oppilas osaa kuvailla eroja ja yhtäläisyyksiä erilaisten yhtälöiden, epäyhtälöiden ja potenssilausekkeiden välillä.	Luokittelutehtävä: Oppilas osaa luokitella yhtälöt, epäyhtälöt ja polynomilausekkeet omiin luokkiinsa (ja kuvailee niiden ominaisuuksia).
Menetelmätieto	Oppilas osaa valita tarkoituksenmukaisen ratkaisumenetelmän yhtälölle tai polynomien yhteen/vähennyslaskulle.	Avotehtävä: Oppilas osaa valita ratkaisutavan toisen asteen yhtälölle (graafinen, algebrallinen) ja perustella ratkaisunsa.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa etsiä/löytää virheen yhtälön/epäyhtälön/ yhtälöparin ratkaisusta.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita ohjeistuksen mukaan joko oikean tai virheellisen ratkaisun vaihtoehtojen joukosta. Tehtävässä annetaan konteksti, johon oppilaan on osattava perustellusti sitoa ratkaisunsa.
AK 6 LUODA		
Faktatieto	Oppilas osaa kehittää oman aritmeettisen tai geometrisen lukujonon.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa muodostaa annettujen ehtojen mukaan säännön ja sen perusteella lukujonon.
Käsitieto	Oppilas osaa perustella lukujonojen jatkoa matemaattisesti oikein.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa luoda aritmeettisen lukujonon, jonka kuudes jäsen on 120.
Menetelmätieto	Oppilas osaa kehittää itselleen uuden ratkaisun annetussa kontekstissa.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa muodostaa avoimesta tehtävästä yhtälön tai epäyhtälön.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa jatkaa lukujonoja avoimissa tilanteissa ja ratkaista ongelmatehtäviä lukujonoihin liittyen. Osaa käyttää soveltaa aiemmin opittua uudessa tilanteessa	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa muodostaa kaksi geometrista lukujonoa, jotka täyttävät etukäteen määritellyt ehdot. Tuottamistehtävä: Oppilas osaa laskea 101^2 hyödyntäen polynomilaskentaa.

TAULUKKO 3. Tehtävämahdollisuuksia sisältöalueelle Funktiot

Funktiot		
AK 1 MUISTAA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas tunnistaa funktion ja sen merkinnän.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita vaihtoehtojen joukosta funktiot.
Käsitieto	Oppilas tunnistaa riippuvuuden käsitteen yhteyden funktioihin.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita oikeat väittämät joukosta, jossa kuvataan mahdollisia keskinäisiä riippuvuuksia. Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa tunnistaa vakiotermin ja kulmakertoimen funktion lausekkeesta.
Menetelmätieto	Oppilas osaa määrittää kulmakertoimen annettujen pisteiden avulla.	Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea kulmakertoimen rutiinomaisessa tilanteessa.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa piirtää suoran kuvaajan suoran yhtälön perusteella käyttäen jotain dynaamisen geometrian ohjelmaa. Oppilas tietää, että funktioilla kuvataan riippuvuuksia.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää funktion kuvaajan esimerkiksi GeoGebraa käyttäen. Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää sopivan funktion oikeaan kontekstiin.
AK 2 YMMÄRTÄÄ		
Faktatieto	Oppilas osaa kuvailla funktion kulmakertoimen vaikutusta funktion kuvaajaan.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita väittämistä todet ja epätodet, esimerkiksi kulmakertoimen etumerkkiin liittyen.
Käsitieto	Oppilas osaa etsiä (tunnistaa) funktion nollakohtan kuvaajasta.	Avotehtävä: Oppilas osaa piirtää tai selittää, mikä ja missä on funktion nollakohta. Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää kuvaajia ja funktioiden lausekkeitä toisiinsa.
Menetelmätieto	Oppilas osaa yhdistää funktion kuvaajan ja sen lausekkeen toisiinsa.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää funktion kuvaajan lausekkeen perusteella.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas ymmärtää funktion ja yhtälön ratkaisemisen välisen yhteyden funktion nollakohtaa määrittettäessä.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kontekstin ja siihen liittyvän funktion perusteella selittää, mihin hän tarvitsee esimerkiksi funktion nollakohtaa tai suurinta arvoa tai mitä tietoa hän saa selvittämällä ne.
AK 3 SOVELTAA		
Faktatieto	Oppilas osaa kuvata funktion kulkua sanallisesti (nouseva, laskeva, paraabeli jne.).	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kertoa, miten funktio kulkee välillä $[x,y]$.
Käsitieto	Oppilas ymmärtää funktion ja verrannollisuuden välisen yhteyden. Oppilas tunnistaa kääntäen verrannollisuuden arkielämän tilanteissa.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa erotella funktiota koskevista väittämistä todet ja epätodet.
Menetelmätieto	Oppilas osaa hyödyntää suoran yhtälöä tarkoituksenmukaisella tavalla.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa jonkin suoralla olevan pisteen koordinaatit, kun hänelle annetaan muita suoralla olevia pisteitä.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa muodostaa sanallisesta tehtävästä funktion ja kertoa, miksi se sopii ko. tilanteeseen.	Avotehtävä: Oppilas osaa kuvata funktion avulla esimerkiksi hinnan riippuvuutta määrästä. Avotehtävä: Oppilas osaa antaa esimerkkejä ilmiöistä, joita voidaan kuvata suoralla, ja selittää, miksi niin voidaan tehdä.

AK 4 ANALYSOIDA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas tunnistaa säännön mukaisuuksia ja syitä ja seurauksia.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää syyt ja seuraukset, esim. positiivinen kulmakerroin-kasvava funktio.
Käsitetieto	Oppilas löytää yhteyksiä kahden suureen välillä ja osaa kuvata yhteyden matemaattisesti.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita oikeat väittämät suureiden välisistä yhteyksiä (esim. pinta-ala, nopeus-kuljettu matka, hinta-määrä jne.) kuvaavien vaihtoehtojen joukosta. Vertailutehtävä: Oppilas osaa päätellä kahdesta kuvaajasta suuremman maksiminopeuden.
Menetelmätieto	Oppilas osaa muodostaa sanallisesta tehtävästä funktion lausekkeen saatuaan tietoja funktiosta.	Avotehtävä: Oppilas osaa muodostaa funktion lausekkeen, kun saa funktiosta sanallista tietoa esim. minuutissa kuljetaan kahden kilometrin matka. Funktion tietoja voi ilmaista tehtävässä joko suoraan matemaattisesti tai kontekstin yhteydessä.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa kertoa omia esimerkkejä suoraan ja kääntäen verrannollisuudesta ja tekemään näistä yleistyksiä.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa yhden esimerkin suoraan ja yhden esimerkin kääntäen verrannollisuudesta. Helpommassa versiossa oppilas valitsee esimerkit isosta joukosta vaihtoehtoja. Avotehtävä: Oppilas osaa selittää, mitä tapahtuu ja mihin vaikuttaisi se, että esimerkiksi suoraan verrannollisuus vaihdettaisiin kääntäen verrannollisuudeksi tietyssä kontekstissa.
AK 5 ARVIOIDA		
Faktatieto	Oppilas osaa tehdä päätelmiä esimerkiksi kulmakertoimen perusteella.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa, miten funktion kulku muuttuu kulmakertoimen muuttuessa.
Käsitetieto	Oppilas osaa vertailla ja antaa esimerkkejä kahden tai useamman käsitteen eroista.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa, miten kasvava ja vähenevä funktio eroavat toisistaan tietyssä kontekstissa.
Menetelmätieto	Oppilas osaa valita tarkoituksenmukaisimman tavan ratkaista funktion nollakohta.	Avotehtävä: Oppilas osaa valita tarkoituksenmukaisimman tavan nollakohdan määrittämiseksi ja perustella valintansa vertaillen.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa eritellä syitä, jotka ovat vaikuttaneet funktion tulkintaan.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa tarkastella kriittisesti hänelle esitettyä funktiota ja kuvitteellisen henkilön tulkintaa siitä. Oppilas osaa perustella, miksi kuvitteellinen henkilö on päätyntä kyseiseen tulkintaan.
AK 6 LUODA		
Faktatieto	Oppilas osaa käyttää funktion ja/tai riippuvuuden käsitettä arkielämän tekstissä.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa esimerkkejä riippuvuuden ilmenemisestä omassa elämässään.
Käsitetieto	Oppilas osaa kertoa syy-seuraussuhteita aineiston perusteella.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa kertoa paloittain määritellyn funktion kulusta ja sen yhteydestä sitä kuvaavaan ilmiöön, esim. väestömäärä ja sen kehittyminen.
Menetelmätieto	Osaa käyttää funktioita ennakoivissa jonkin asian kehitystä.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa kuvailla saamiensa aikaan liittyvien tilastojen (esimerkiksi syntyvyydestä, koulutusmääristä tms.) perusteella, millaisia ilmiöitä tulevaisuudessa tulee näkymään.
Metakognitiivinen tieto	Osaa yhdistää verrannollisuuden käsitteen käytännön ongelmanratkaisuun.	Avotehtävä: Oppilas osaa kuvailla esim. suunnikkaan korkeuden riippuvuutta kannasta, heilurin liikettä tms.

TAULUKKO 4. Tehtävämahdollisuuksia sisältöalueelle Geometria

Geometria		
AK 1 MUISTAA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas tunnistaa geometrisia käsitteitä ja ymmärtää niiden olevan geometriaa. Oppilas tunnistaa Pythagoraan lauseen.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita eri vaihtoehdoista esim. Pythagoraan lauseen. Aineistotehtävä: Oppilas löytää kuvasta tai tekstistä geometrisia käsitteitä.
Käsitetieto	Oppilas osaa nimetä geometrisia käsitteitä tai mittavälineitä.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa nimetä kuvasta/tekstistä geometrisia käsitteitä. Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää käsitteen ja selityksen.
Menetelmätieto	Oppilas osaa tehdä perusmittauksia.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää sopivan mittavälineen mitattavaan asiaan, esimerkiksi aika-kello. Mittaamistehtävä: Oppilas osaa mitata kulman suuruuden tai esineen pituuden.
Meta-kognitiivinen tieto	Oppilas tunnistaa oikeat laskukaavat tai mittavälineet piirin, pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen ja Pythagoraan lauseen soveltamiseen.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää esimerkiksi tilavuuden laskemiseen oikean laskukaavan ja kaavan mukaisen yksikön.
AK 2 YMMÄRTÄÄ		
Faktatieto	Oppilas osaa kuvailla sanallisesti (tai alaluokilla piirtämällä) geometrian peruskäsitteitä.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää neliö/kuutio/suorakulmainen kolmio.
Käsitetieto	Oppilas osaa piirtää/kuvailla geometrisia käsitteitä ja niiden ominaisuuksia	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää kolme erilaista kolmiota/nelikulmiota ja kuvaile niiden eroja/ yhtäläisyyksiä toisiinsa nähden. Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kertoa trigonometrinen funktioiden käytöstä.
Menetelmätieto	Oppilas osaa hyödyntää tuntemiaan geometrian käsitteitä ja niihin liittyviä ominaisuuksia uudessa tilanteessa.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää geometrisen kuvion ohjeistuksen mukaan.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas tunnistaa geometristen käsitteiden eroja ja yhtäläisyyksiä.	Vertailu- ja avotehtävä: Oppilas osaa laittaa kuvioita ja kappaleita suuruusjärjestykseen piirin, pinta-alan tai tilavuuden mukaan, kun niistä on annettu esimerkiksi halkaisija tai sivun pituus, ja perustella vastauksensa.

AK 3 SOVELTAA		
Faktatieto	Oppilas osaa päätellä geometristen kuvioden ominaisuuksia.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa jakaa annetun monikulmion pienempiin osiin voidakseen laskea monikulmion ominaisuuksia.
Käsitieto	Oppilas luokitella erilaisia kuvioita ja kappaleita.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää suorakulmion, jonka pituus, leveys ja korkeus on annettu. Oppilas osaa piirtää kolmisivuisen pyramidin /tetraedrin), josta annettu tarvittavat tiedot. Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea, kuinka monta neliötä/kolmiota on kuvassa (kuvassa on sisäkkäisiä neliöitä tai muita monikulmiota.)
Menetelmätieto	Oppilas osaa laskea kuvioden ja kappaleiden piirejä, pinta-aloja ja tilavuuksia ja soveltaa Pythagoraan lausetta.	Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea kuvassa annetun neliön, suorakulmion/ympyrän piirin/pinta-alan/tilavuuden. Kuvio voi olla piirretty myös koordinaatistoon ja siihen on annettu keskeiset pisteet ratkaisua varten.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa kertoa, miksi jotain käsitettä tai menetelmää käytetään tietyssä tilanteessa.	Soveltamistehtävä: Oppilas osaa hyödyntää jotain dynaamisen geometrian ohjelmistoa (esim. GeoGebra) kuvion/kappaleen ominaisuuksien selvittämiseksi. Oppilas osaa valita järkevän mittaustarkkuuden eri tilanteisiin.
AK 4 ANALYSOIDA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas osaa kuvailla geometristen kuvioden ominaisuuksia.	Kielentäminen: Oppilas osaa kielentää eron yksiulotteisen, kaksiulotteisen ja kolmiulotteisen käsitteen välillä käyttäen esimerkkejä. Luokittelutehtävä: Oppilas osaa luokitella kuvat ja kappaleet niiden ulottuvuuksien mukaan.
Käsitieto	Oppilas tunnistaa symmetriasuhteita kuvasta.	Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää kuviolle suoran suhteen symmetrisen kuvion. Osaa piirtää symmetria-akseleita kuvioihin. Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa tunnistaa symmetrian kuvista ja osaa kertoa, minkä suhteen symmetria esiintyy (suoran tai pisteen suhteen)
Menetelmätieto	Oppilas ymmärtää ja osaa kuvata ja käyttää suorakulmaisen kolmion erityispiirteitä.	Laskutehtävä: Oppilas osaa soveltaa Pythagoraan lausetta oikein, esimerkiksi sanallisessa kontekstissa.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa analysoida erilaisten geometrisen kappaleiden/ kuvioden ominaisuuksia ja laskumenetelmiä niiden osalta.	Kuvailutehtävä: Oppilas osaa kuvailla laskumenetelmän esimerkiksi epäsäännöllisen monikulmion pinta-alan laskemiseksi. Oppilas osaa perustella laskumenetelmän oikeellisuuden.

AK 5 ARVIOIDA		
Faktatieto	Oppilas löytää tekstistä/kuvasta virheellisyksiä/epätarkkuuksia.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa etsiä kuvasta/tekstistä geometrisia virheitä tai epätarkkuuksia ja perustella ne.
Käsitieto	Oppilas osaa vertailla ja kuvailla geometrisia käsitteitä.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa laatia annettuja geometrisia käsitteitä käyttäen matemaattisesti järkevän tehtävän, joka voidaan ratkaista.
Menetelmätieto	Oppilas osaa vertailla tehtävän ratkaisumahdollisuuksia.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita vaihtoehtojen joukosta parhaan ratkaisun tehtävään.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa perustella eri ratkaisumahdollisuuksia.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa valita vaihtoehtojen joukosta parhaan ratkaisun tehtävään, perustella valintansa muihin vertaamalla ja suorittaa laskutoimitukset tehtävän ratkaisemiseksi.
AK 6 LUODA		
Faktatieto	Oppilas pystyy kuvailemaan itselleen uuden kuvion/kappaleen ominaisuuksia geometrisesti järkevällä tavalla.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kuvailla näkemänsä kappaleen tai tasokuvion ominaisuuksia käyttäen oppimiaan käsitteitä ja tuottaen niiden avulla uutta.
Käsitieto	Oppilas osaa kielentää kuvion riippuvuussuhteita.	Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kuvailla, miten kuvion (neliö, suorakulmio, suunnikas, suorakulmainen kolmio) pinta-ala riippuu kuvion korkeudesta/kannasta.
Menetelmätieto	Oppilas osaa keksiä uusia vaihtoehtoisia ratkaisustrategioita. Oppilas osaa hyödyntää dynaamisen geometrian ohjelmia ongelman ratkaisemisessa.	Todistustehtävä: Oppilas osaa kehittää havainnollistuksen, joka osoittaa esimerkiksi kolmion kulmien summan. Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea suunnikkaan pinta-alan kahdella eri tavalla tai kielentää ratkaisutavat.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa suunnitella ratkaisuprosessin geometriseen käytännön ongelmaan.	Avotehtävä: Oppilas osaa kehittää annetut ehdot täyttävän ratkaisun, esimerkiksi tietyt ehdot täyttävän astian/vaatteen/kaapin tms. suunnittelu, kun materiaalin määrä on tiedossa.

TAULUKKO 5. Tehtävämahdollisuuksia sisältöalueelle Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys

Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys		
AK 1 MUISTAA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas muistaa ja tunnistaa taulukon osat (rivi, sarake, solu)	Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa poimia pyydettyjä tietoja taulukosta, esim. suurimman ja pienimmän arvon, keskiarvon, solun arvon jne. Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita varmat seuraavista tapahtumat vaihtoehtojen joukosta.
Käsitieto	Oppilas muistaa keskiluvut (keskiarvo, mediaani, tyyppiarvo) ja tunnistaa niiden merkityksen. Oppilas tunnistaa erilaisia diagrammeja osaa nimetä ne.	Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa nimetä erilaisia diagrammeja kuvan perusteella.
Menetelmätieto	Oppilas tietää, mikä on diagrammi ja osaa lukea sitä.	Diagrammin tulkinta: Oppilas osaa katsoa erilaisista diagrammeista suurimman ja pienimmän arvon.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa täyttää taulukkolaskentaohjelmaan tietoja tilastosta.	Taulukkolaskennan käyttö: Oppilas osaa täyttää taulukkoon annetut tilastotiedot.
AK 2 YMMÄRTÄÄ		
Faktatieto	Oppilas osaa kuvata sanallisesti keskilukujen ominaisuuksia. Oppilas osaa kuvata, mitä tarkoittaa todennäköisyys.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa kertoa aineiston tai arkitilanteen perustella, onko jonkin tapahtuma mahdollinen, mahdoton vai varma. Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää aineiston keskiluvut oikeaan käsitteeseen. Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita, onko tapahtuman todennäköisyys mahdoton, mahdollinen vai varma.
Käsitieto	Oppilas ymmärtää todennäköisyyden käsitteen.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa arvioida arkitilanteisiin perustuvien todennäköisyyttä kuvaavien väittämien todenperäisyyttä. Tuottamistehtävä: Oppilas osaa kertoa omin sanoin esimerkiksi, mitä tarkoittaa moodi.
Menetelmätieto	Oppilas osaa käyttää keskilukuja kielentäessään aineiston sisältöä.	Laskutehtävä: Oppilas osaa kielentää aineistoa ja käyttää järkevästi keskilukuja. Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa valita sopivan diagrammin tietojen esittämiseen.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa kielentää keskilukujen välisen eron ja tietää niiden käyttömahdollisuuksia.	Avoin tehtävä: Oppilas osaa valita, mikä keskiluku soveltuu parhaiten kuvaamaan tilastoa. Piirtämistehtävä: Oppilas osaa piirtää taulukkolaskentaa hyödyntäen sopivan diagrammin annetusta aineistosta.

AK 3 SOVELTAA		
Faktatieto	Oppilas osaa lukea erilaisia diagrammeja ja taulukoita.	Avotehtävä: Oppilas osaa annetun diagrammin perusteella vastata lyhyisiin kysymyksiin. Monivalintatehtävä: Oppilas osaa täydentää taulukkoa ja sen tilastollisia tunnuslukuja saamiensa faktojen perusteella.
Käsitieto	Oppilas osaa käyttää käsitettä tehtävän ratkaisemiseen.	Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa vaihteluvälin.
Menetelmätieto	Oppilas osaa laskea tilastosta prosenttiosuuksia.	Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea tilastoaineiston perusteella prosenttiosuuksia ja keskilukuja. Aineisto- ja tuottamistehtävä: Oppilas osaa laatia diagrammin kuvaamaan saamaansa kuva- tai tekstiaineistoa.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa vertailla arkitilanteiden todennäköisyyksiä.	Avotehtävä: Oppilas osaa arvioida ja perustella arkitilanteiden todennäköisyyksiä, esim. jääkö todennäköisemmin auton vai keltaisen auton alle. Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa, miksi tilastoja esitetään usein prosenttiosuuksina.
AK 4 ANALYSOIDA	Tavoitteet	Tehtävämahdollisuuksia:
Faktatieto	Oppilas osaa erotella erilaisia diagrammeja ja niiden käyttömahdollisuuksia. Oppilas osaa käyttää prosenttilaskentaa tilastollisissa yhteyksissä.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita todet väittämät vaihtoehdoista, joissa kerrotaan diagrammin kuvaamia prosenttiosuuksia. Avotehtävä: Oppilas osaa kertoa, mitä keskiarvolle tapahtuu, kun suurin arvo kasvaa.
Käsitieto	Oppilas osaa lukea tilastoa (taulukkona tai diagrammina) ja tehdä siitä johtopäätöksiä. Oppilas ymmärtää todennäköisyyksien laskentatavan.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita tilaston pohjalta tehdyistä väittämistä joko oikeat tai täysin virheelliset. Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita vaihtoehtojen joukosta erilaisten kombinaatioiden määriä arkielämän tilanteissa (nopanheitto, vaatevalikoima, oppilaiden järjestys jne.).
Menetelmätieto	Oppilas osaa vertailla erilaisia ratkaisumenetelmiä laskiessaan todennäköisyyksiä tai laatiessaan tilastoja.	Aineisto- ja avotehtävä: Oppilas osaa kertoa, millaisiin kysymyksiin hän pystyy vastaamaan annetun tilastoaineiston perusteella. Laskutehtävä: Oppilas osaa laskea vaihtoehtojen määrän ja sen avulla todennäköisyyden esimerkiksi nopanheitossa, nopan parillisten osumien ollessa kyseessä, kahden nopan tilanteessa jne.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa lukea kriittisesti tilastojen pohjalta tehtyä uutista.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa pohtia uutisen paikkansa pitävyyttä, kun uutisessa on analysoitu tilastoa.

AK 5 ARVIOIDA		
Faktatieto	Oppilas etsii tietoja eri tavoin esitetystä tilastosta.	Tunnistamistehtävä: Oppilas osaa tunnistaa virheen/t tilastoista esitettyissä kuvauksissa
Käsitieto	Oppilas tunnistaa samasta aineistosta tehdyt erilaiset diagrammit. Oppilas osaa päätellä todennäköisyyksiä arkielämän tilanteista.	Yhdistämistehtävä: Oppilas osaa yhdistää diagrammin sen aineistoon (useita erilaisia diagrammeja ja aineistoja).
Menetelmätieto	Oppilas ymmärtää tapausten riippumattomuuden tai riippuvuuden toisistaan.	Monivalintatehtävä: Oppilas osaa valita keskenään riippuvat ja riippumattomat tapaukset.
Meta-kognitiivinen tieto	Oppilas osaa arvioida esitettyjen tilastojen oikeellisuutta.	Aineisto- ja avotehtävä: Oppilas osaa arvioida urheilutilastoja (maalientekoprosentti, torjuntaprosentti tms.) tilastojen ja todennäköisyyksien näkökulmasta.
KA 6 LUODA		
Faktatieto	Oppilas osaa tuottaa aineiston perusteella tietoa, jota tehtävänannossa ei mainita.	Aineistotehtävä: Oppilas osaa tuottaa datasta sellaista informaatiota, jota tekstissä ei mainita. Data voi kertoa vaikkapa liikuntatuloksista. Oppilaan on mahdollista löytää eroja vaikkapa tyttöjen ja poikien välillä tms.
Käsitieto	Oppilas osaa valita tilanteeseen sopivan tilastollisen tunnusluvun ja perustella valintansa.	Aineistotehtävä (kuva tai teksti): Oppilaan osaa laskea aineiston perusteella tilanteeseen parhaiten sopivan tilastollisen tunnusluvun tai prosenttiosuuden ja perustella valintansa. Aineistotehtävä: Oppilas osaa laskea kahdesta eri aineistosta valitsemansa tunnusluvun ja kertoa näiden perusteella esimerkiksi eri urheilujoukkueiden suoriutumisesta.
Menetelmätieto	Oppilas osaa ratkaista tilastollisen tehtävän usealla eri tavalla.	Avotehtävä: Oppilas osaa muodostaa vaihtoehtoiset tutkimusmenetelmät ongelman ratkaisemiseksi annetussa kontekstissa.
Metakognitiivinen tieto	Oppilas osaa avoimen tehtävänannon kautta analysoida samaansa aineistoa ja siitä tehtyjä päätelmiä ja perustella omat päätelmänsä.	Aineisto- ja avotehtävä: Oppilas osaa etsiä saamastaan analyysistä, esimerkiksi vaaligallupista tai -tuloksista, mahdollisia vaikuttamiskeinoja. Tuottamistehtävä: Oppilas osaa laatia aineiston perusteella diagrammin ja analysoida sen perusteella aineiston antamaa informaatiota.

Kansallinen koulutuksen arviointikeskus (Karvi) on itsenäinen koulutuksen arviointiviranomainen. Se toteuttaa koulutukseen sekä opetuksen ja koulutuksen järjestäjien toimintaan liittyviä arviointeja varhaiskasvatuksesta korkeakoulutukseen. Lisäksi arviointikeskus toteuttaa perusopetuksen ja toisen asteen koulutuksen oppimistulosten arviointeja. Keskukseen tehtävänä on myös tukea opetuksen ja koulutuksen järjestäjiä ja korkeakouluja arviointia ja laadunhallintaa koskevissa asioissa sekä kehittää koulutuksen arviointia.

ISBN 978-952-206-788-3 pdf
ISSN 2342-4184 (verkkojulkaisu)

Kansallinen koulutuksen
arviointikeskus
PL 380
(Hakaniemenranta 6)
00531 Helsinki
Puhelinvaihte: 029 533 5500
karvi.fi